ENADE
COMENTADO

MATEMÁTICA
2014

TÂNIA C. B. CABRAL
VANDOIR STORMOWSKI
(Organizadores)

MARISTA
FAMAT
ediPUCRS
PROACAD
AD VERVM DVCIT
PUCRS

ENADE
COMENTADO

MATEMÁTICA

2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio Grande do Sul

ENADE
Comentado

MATEMÁTICA
2014

TÂNIA C. B. CABRAL
VANDOIR STORMOWSKI
(Organizadores)

ediPUCRS
Porto Alegre, 2017

CAPA: RODRIGO BRAGA

REVISÃO DE TEXTO: PATRÍCIA ARAGÃO

EDITORAÇÃO ELETRÔNICA: RODRIGO VALLS

EDIÇÃO REVISADA SEGUNDO O NOVO ACORDO ORTOGRÁFICO DA LÍNGUA PORTUGUESA.

EDIPUCRS – Editora Universitária da PUCRS

Av. Ipiranga, 6681 – Prédio 33
Caixa Postal 1429 – CEP 90619-900
Porto Alegre – RS – Brasil
Fone/fax: (51) 3320 3711
E-mail: edipucrs@pucrs.br
Site: www.pucrs.br/edipucrs

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

E56 ENADE comentado 2014 [recurso eletrônico] : matemática / organizadores Tânia C. B. Cabral, Vandoir Stormowski. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : EDIPUCRS, 2017.
Recurso on-line

Modo de acesso: http://www.pucrs.br/edipucrs/
ISBN 978-85-397-1010-2

1. Matemática – Ensino – Avaliação. 2. Ensino superior – Brasil. 3. Matemática. I. Cabral, Tânia C. B.. II. Stormowski, Vandoir.

CDD 23. ed. 510

Lucas Martins Kern CRB 10/2288
Setor de Tratamento da Informação da BC-PUCRS

ENADE
Comentado

Sumário

CONTEÚDO

APRESENTAÇÃO 8
NOTA DOS AUTORES 11
QUESTÃO DISCURSIVA 3 13
QUESTÃO 9.......... 18
QUESTÃO 10.......... 20
QUESTÃO 11.......... 22
QUESTÃO 12.......... 26
QUESTÃO 13.......... 29
QUESTÃO 14.......... 31
QUESTÃO 15.......... 35
QUESTÃO 16 38
QUESTÃO 17.......... 39
QUESTÃO 18.......... 41
QUESTÃO 19 43
QUESTÃO 20.......... 45
QUESTÃO 21.......... 47
QUESTÃO 22.......... 49
QUESTÃO DISCURSIVA 4 51
QUESTÃO 23 58
QUESTÃO 24 61
QUESTÃO 25.......... 64
QUESTÃO 26.......... 66
QUESTÃO 27.......... 69
QUESTÃO 28.......... 71
QUESTÃO 29.......... 74
QUESTÃO 30.......... 76
QUESTÃO 5.......... 81
QUESTÃO 23.......... 83
QUESTÃO 24.......... 85
QUESTÃO 25 89
QUESTÃO 26 91
QUESTÃO 27.......... 93
QUESTÃO 28.......... 95
QUESTÃO 29.......... 97
QUESTÃO 30.......... 100
QUESTÃO 31.......... 102
QUESTÃO 32.......... 104
QUESTÃO 33.......... 106
QUESTÃO 34.......... 108
QUESTÃO 35.......... 110

APRESENTAÇÃO

Os Cursos de Matemática no Enade 2014

Desde 1996 a Educação Superior brasileira tem sido alvo de avaliações de larga escala. O Exame Nacional de Cursos, mais conhecido por “Provão”, vigorou de 1996 a 2003 e consistia da aplicação de uma prova a todos os estudantes formandos de um grupo de cursos de graduação. Em 2004, o Provão foi substituído pelo Exame Nacional de Desempenho de Estudantes ou Enade. A partir desse momento, os cursos passaram a ser avaliados de três em três anos.

O desempenho dos alunos nas provas está diretamente relacionado aos três conceitos derivados do Enade: o conceito Enade, o Indicador de Diferença de Desempenho (IDD) e o Conceito Preliminar de Curso (CPC). Além do desempenho nas provas, outros fatores são importantes na definição dos conceitos. Para um melhor entendimento, vejamos uma breve explicação de cada conceito.

Conceito Enade

O conceito Enade de um curso é calculado exclusivamente a partir do desempenho dos alunos concluintes nas provas de componente específico (CE) e formação geral (FG). A parte de CE tem peso de 75% na nota final do curso, enquanto a FG é responsável pelos outros 25%. Salienta-se que o desempenho médio dos alunos de um curso é sempre comparado ao desempenho do grupo de estudantes daquela área que realizou a mesma prova. Portanto, o conceito Enade é relativo ao desempenho do grupo. Cursos com conceito Enade “4 ou 5” são aqueles cujos alunos apresentaram média bastante superior ao total de alunos da área.

Indicador de Diferença de Desempenho (IDD)

O IDD é um indicador que procura neutralizar o efeito de diferentes níveis de dificuldade de ingresso e de perfil socioeconômico sobre o desempenho dos alunos nas provas. No IDD, o desempenho dos alunos concluintes é comparado ao desempenho esperado por meio de um modelo de regressão. Um IDD igual a 3 caracteriza um curso que atingiu o desempenho esperado. Já IDDs 4 ou 5 indicam cursos que superaram o esperado, atingindo uma média nas provas superior ou muito superior ao desempenho estimado pelo modelo.

Conceito Preliminar de Curso (CPC)

O CPC procura sintetizar os resultados do Enade, IDD e outros fatores num único conceito. A partir da edição do Enade de 2013, o CPC passou a apresentar a seguinte composição: desempenho na prova do Enade (20%), IDD (35%), instalações e Infraestrutura (5%), organização didático-pedagógica (7,5%), oportunidades de ampliação (2,5%), percentual de professores com, no mínimo, título de mestre (7,5%), professores com doutorado (15%) e professores em regime de tempo parcial ou integral (7,5%).

O CPC é o principal indicador utilizado pelo Ministério de Educação (MEC) para avaliação de um curso. Cursos avaliados com 1 ou 2 são passíveis de intervenção e deverão ser visitados de uma comissão de avaliadores nomeada pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). O CPC é divulgado de duas formas – contínuo e conceito – e a tabela utilizada para conversão é a seguinte:

Tabela 1 – Tabela para conversão do CPC contínuo em conceito.

CPC contínuo	Conceito CPC
0,00 – 0,94	1
0,95 – 1,94	2
1,94 – 2,94	3
2,95 – 3,94	4
3,95 – 5,00	5

Os cursos de Matemática (Licenciatura e Bacharelado) foram avaliados por meio do CPC a partir de 2008. A última avaliação foi em 2014 e a próxima será em 2017. Na edição de 2014, 443 cursos de licenciatura e 47 de bacharelado foram avaliados, dos quais 365 receberam conceito CPC.

A Figura 1 apresenta o histograma com a distribuição do CPC contínuo em âmbito nacional, incluindo cursos de licenciatura e bacharelado.

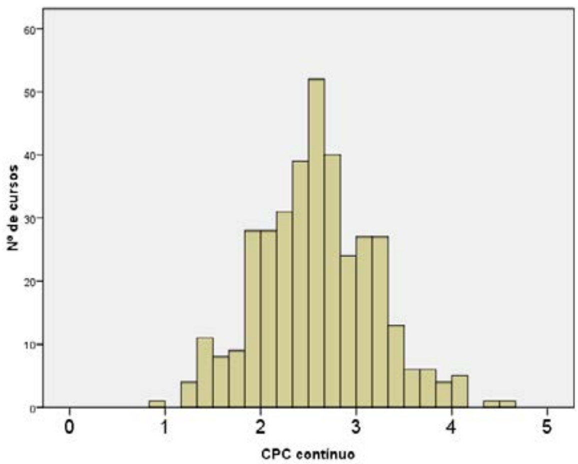


Figura 1 – Histograma dos CPC contínuos em âmbito nacional.

A Figura 1 mostra uma concentração de cursos em torno do CPC contínuo 2,5, e um pequeno número de cursos próximo do valor máximo. De um modo geral, os cursos de Matemática não apresentaram resultados regulares na avaliação, o que fica evidente na Tabela 2 com 61,6% dos cursos de licenciatura com conceito igual a 3. Apenas 8 cursos de Matemática no Brasil atingiram conceito máximo.

Tabela 2 – Distribuição dos conceitos CPC em âmbito nacional no Enade 2014.

CPC	*Licenciatura*		*Bacharelado*	
	f	*%*	*f*	*%*
1	1	0,3%	0	0,0%
2	45	13,7%	3	8,1%
3	202	61,6%	15	40,5%
4	74	22,6%	17	45,9%
5	6	1,8%	2	5,4%
Total	328	100,0%	37	100,0%

Outro fato que merece destaque é o de que todos os oito cursos que atingiram o conceito máximo são oferecidos em universidades. O curso de Licenciatura em Matemática da PUCRS, responsável pela construção desta obra, obteve conceito máximo (5) em todas as avaliações, sendo o único curso da região sul do país a atingir este feito (Tabela 3).

Tabela 3 – Histórico dos conceitos do curso de Licenciatura em Matemática da PUCRS.

Ano	*n*	*Enade Contínuo*	*IDD Contínuo*	*CPC Contínuo*	*CPC Faixa*
2008	11	4,64	4,42	3,95	5
2011	10	4,38	4,66	4,16	5
2014	17	4,39	4,01	3,96	5

Como mencionado no início deste texto, todas as provas do Enade são constituídas pelos dois componentes: Formação Geral (FG) e Componente Específico (CE).

Nesta obra serão apresentadas e discutidas 40 questões referentes ao CE. As questões de FG dos últimos três Enades serão apresentadas em outra obra da EdiPUCRS, intitulada “Enade – Formação Geral”. Espero que ajude o leitor em sua preparação para a avaliação do Enade.

Hélio Radke Bittencourt

Porto Alegre, junho de 2017.

NOTA DOS EDITORES

Caríssimo leitor, externamos imenso prazer ao apresentar o e-book que compõe a Série Enade Comentado da área de Matemática, referente à prova de 2014, publicada pela PUCRS. Uma vez que a instituição visa a excelência em formação profissional e responsável de seus egressos, essa iniciativa deve contribuir para a avaliação permanente da formação oferecida e do próprio Projeto Pedagógico dos Cursos de Licenciatura em Matemática e Bacharelado em Matemática de nossa universidade.

Elaborar um livro a várias mãos, com tempos diferentes de demandas e respostas, ainda que no formato eletrônico, em que a Matemática, com tudo o que a cerca, seja objeto de reflexão, não é uma das tarefas mais simples se consideramos que temos obsessão pelo produto bem-feito. Tentamos fazer o melhor diante do processo de ir e vir de alguns comentários e ante as conversações com colegas nos interstícios de compromissos que temos como professores. Assim, pedimos, desde já, sua compreensão quanto a qualquer falha que venha a encontrar.

De imediato então temos de manifestar reconhecimento pela colaboração dos participantes. Agradecimentos especiais dirigimos ao nosso colega Professor Hélio Radke Bittencourt por, mais uma vez, ter aceito o convite para escrever a introdução desse e-book, mostrando os bons resultados que nossos cursos têm alcançado também nas provas do Enade.

Agradecemos a colaboração dos colegas e dos alunos que se dispuseram a comentar as questões quanto à apresentação e interpretação dos problemas e situações, aos conhecimentos requeridos e à lógica a ser desenvolvida, aspectos considerados nem sempre tão fáceis ou imediatos para tratar, mas essenciais para a formação de profissionais que lidam com a Matemática.

Seguindo o percurso já consolidado por edições anteriores, também para este e-book foi solicitado que na discussão sobre os problemas fossem apresentados conceitos e resultados básicos, uma bibliografia vinculada ao tema e, quando possível, se apropriado, notas históricas. Isso tudo visa contribuir para que assuntos possam ser aprofundados de modo a prover informações aos alunos que se submeterão ao Enade 2017. Esse é um lado da moeda. O outro lado concerne ao fato, embora não obrigatoriamente, que os comentários possam munir o professor de perspectivas sobre aspectos que compõem, em última instância, o campo da didática, lugar de referências para organizar sequências didáticas, conjuntos de desafios, projetos que estimulem os alunos a trabalharem de modo cooperativo e colaborativo. Naturalmente, tudo isso depende dos óculos que você, nosso caro leitor, utiliza.

Corroborando o que foi observado em edições publicadas, chamamos sua atenção para as classificações referentes ao grau de dificuldade do problema, incluídas nos comentários. Uma vez que não se trata de posições fechadas, isto é, de haver consenso sobre o assunto, assumimos que toda avaliação que possa ser usada para uma classificação, que não pretenda se restringir a meros aspectos técnicos, tem um grau elevado de subjetividade. Assim, não se surpreenda, caro leitor, se relativamente a certas questões o grau de dificuldade atribuído seja discordante do que foi conferido oficialmente, pois, afinal, prevaleceram os critérios do comentarista, especialista na área que abrange as questões, inspirado por sua experiência docente.

Como dissemos e aqui sublinhamos, além dos reconhecidos critérios técnicos naturalmente vinculados a um assunto em Matemática, sempre são considerados aspectos como conhecimentos prévios necessários, conhecimentos que podem ser suscitados, articulações entre informações, modos de justificar que ficam no limite entre o rigor característico da Matemática e as possíveis argumentações amparadas em concepções provisórias que têm seus domínios de validade, além do próprio modo como o enunciado é apresentado; por vezes então não se observa uma concordância com a classificação oficial divulgada.

Finalizando... Nesse ponto, não nos parece que haja mais o que acrescentar. Assim, só podemos ansiar que essa edição do e-book seja tornada matéria-prima para você, quer seja professor, quer seja aluno, nosso melhor leitor.

Boa leitura e bons estudos!

Tânia C. B. Cabral e Vandoir Stormowski

Porto Alegre, 4 de junho de 2017.

QUESTÃO DISCURSIVA 3

Os principais efeitos visuais da computação gráfica vistos em uma tela são resultados de aplicações de transformações lineares. Translação, rotação, redimensionamento e alteração de cores são apenas alguns exemplos.

Considere que uma tela é cortada por dois eixos, x e y, ortogonais entre si, formando um sistema de coordenadas com origem no centro da tela. Suponha que nessa tela plana, existe a imagem de uma elipse com eixo maior de tamanho 4, paralelo ao eixo x, e cujos focos têm coordenadas (-1,2) e (1,2). Considere T um operador linear definido em R^2

De acordo com as informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

A. Mostre que o ponto $(0,2+\sqrt{3})$ pertence à elipse. (valor: 3,0 pontos)

B. Suponha que, em cada ponto da tela, seja aplicado o operador linear $T(x,y)=(x+y, -2x+4y)$
Quais serão as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T? (valor: 3,0 pontos)

C. Calcule os autovalores do operador linear $T(x,y)=(x+y,-2x+4y)$. (valor: 4,0 pontos)

Autoria: Eliete Biasotto Hauser

COMENTÁRIO:

Seções cônicas são curvas obtidas cortando-se um cone circular reto por um plano, e sua definição depende de pontos especiais desse plano, chamados focos. As seções cônicas mais importantes são elipses, hipérboles e parábolas, que ocorrem quando o plano corta o cone sem passar pelo seu vértice.

Elipse é uma seção cônica definida como o conjunto de todos os pontos P do plano, cujas somas das distâncias aos focos F1 e F2 é uma constante 2a (comprimento do eixo maior):

$$d(P,F1)+d(P,F2)=2a. \qquad (1)$$

A igualdade (1) descreve o lugar geométrico, ilustrado na figura 1, centrado em C=(h,k), com eixo menor 2b e distância focal 2c (d(F1, F2)=2c) representado pela equação

$$\frac{(x-h)2}{a^2}+\frac{(y-k)2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

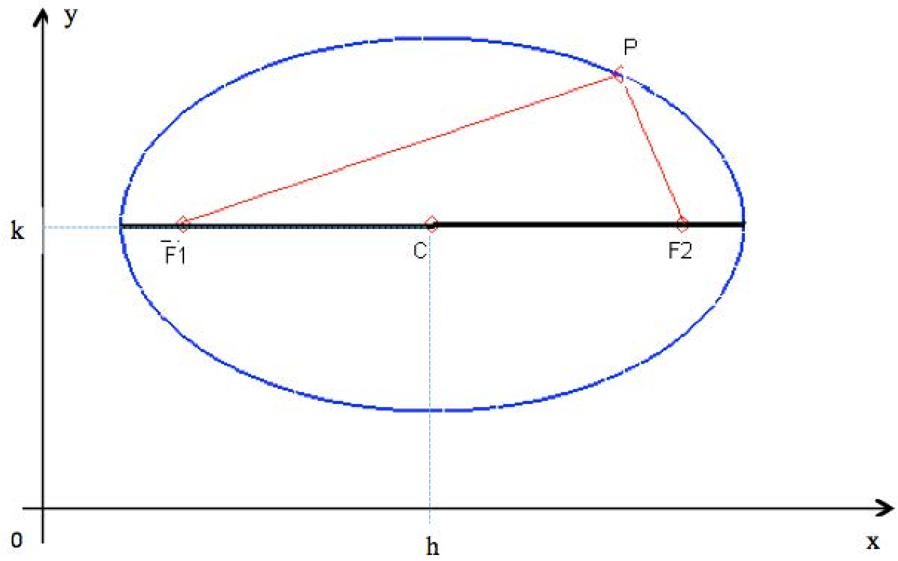


Figura 1 – Elipse com centro C=(h, k).

A distância focal e os comprimentos dos eixos da elipse estão relacionados pela equação

$$a^2 = b^2 + c^2 \tag{3}$$

deduzida geometricamente a partir da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo que consta na figura 2.

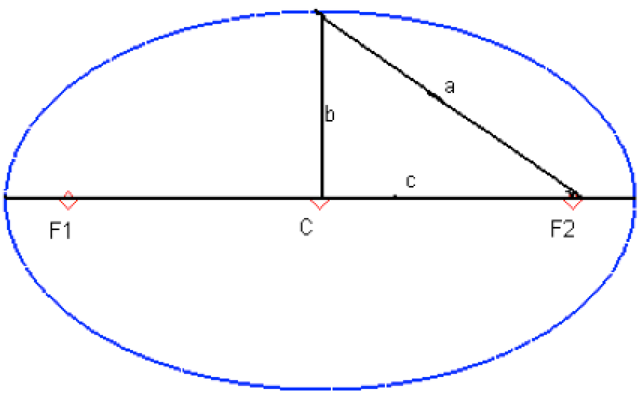


Figura 2 – Relação entre distância focal e medidas dos eixos da elipse.

Uma vez relembrados esses conceitos, estamos em condições de mostrar o solicitado no item a.

A. Sejam P= $(0,2+\sqrt{3})$, F1$(-1,2)$ e F2=$(1,2)$ os focos. Se P é um ponto da elipse, então, por (1), d(P, F1)+d(P, F2) = 4.

Com efeito,

d(P, F1) + d(P,F2)=

$$\sqrt{(0-(-1))^2+(2+\sqrt{3}-2)^2} + \sqrt{(0-1)^2 + (2+\sqrt{3}-2)^2}$$

$$\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}+\sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4}+\sqrt{4}= 4$$

Também, a afirmação poderia ter sido demonstrada, a partir da construção da equação da elipse dada em (2).

Como os focos são conhecidos, o centro da elipse é c=(0,2), o ponto médio do segmento de extremidades F1 e F2. Também, como d(F1, F2)=2c, então c=1. O comprimento do eixo maior é 4, então, 2a=4,ou seja, a=2. Assim, pela equação (3), b=$\sqrt{3}$.

Substituindo h=0, k=2, a=2 e b=$\sqrt{3}$ em (2), obtemos

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}=1. \tag{4}$$

O ponto P=$(0,2+\sqrt{3})$, está sobre a elipse pois satisfaz a equação (4):

$$\frac{0^2}{4}+\frac{(2+\sqrt{3}-2)^2}{3}=1$$

Isso também pode ser observado na figura 3.

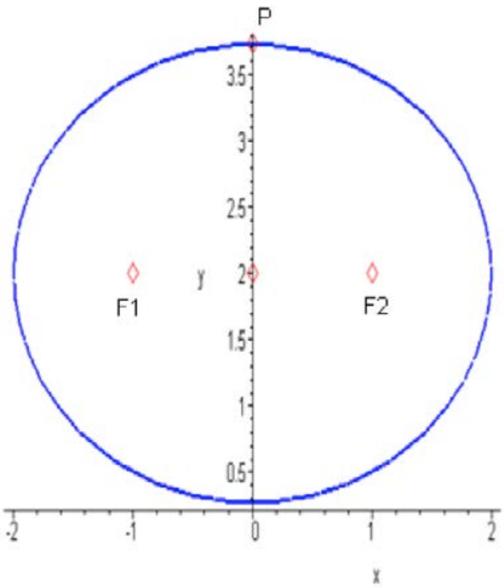


Figura3: P = (0 , 2+ $\sqrt{3}$) sobre o gráfico da elipse $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-2)^2}{3}=1$.

Transformações lineares são amplamente utilizadas em computação gráfica, no estudo de processos caóticos, sistemas de controle em engenharia e filtragem de ruídos em sinais acústicos elétricos.

Uma função $T:R^m \rightarrow R^n$ é uma **transformação linear** de R^m em R^n, se para quaisquer vetores v e **w** $\in R^m$ e qualquer $k \in R$.

I. T(Kv)=KT(v) e

II. T(v+w)=T(v)+T(w).

Um **operador linear** é um caso especial de uma transformação linear, que ocorre quando m=n.

A transformação linear T pode ser representada matricialmente, dependendo das bases de R^m e R^n consideradas. As colunas da **matriz canônica** de T constituem as imagens dos vetores da base canônica do por T.

Consideremos o operador linear dado, $T:R^2 \rightarrow R^2$, definido por

$$T(x,y)=(x+y, -2x+4y). \tag{5}$$

Como

$$T(1,0)=(1+0,(-2)x1+4x0)=(1,-2)$$

e

$$T(0,1)=(0+1,(-2)x0+4x1)=(1,4)$$

a matriz canônica de T é

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Se existe $\lambda \in R$ tal que

$$T(v) = \lambda\, T(v), \tag{7}$$

então o vetor $v \in R^m$, é um **autovetor** (ou vetor próprio) do operador linear $T:R^m \rightarrow R^m$. E, o número real λ é denominado **autovalor** (ou valor próprio) de T.

Usando a representação matricial de (7), temos que $A\,v = \lambda\, v$, ou, $A\,v - \lambda\, v = 0$. Como podemos escrever $Av - \lambda Iv = 0$. Construímos um sistema linear homogêneo

$$(A - \lambda I)v=0, \tag{8}$$

o qual admite soluções não triviais se

$$\det(A - \lambda I)=0. \tag{9}$$

Em (9), $\det(A - \lambda I)$ é um polinômio como função de λ, denominado **polinômio característico** do operador T, ou da matriz A, e suas raízes são os autovalores de T.

A partir dessas considerações, a seguir determinamos o solicitado nos ítens b e c da presente questão.

Considerando F1=(–1,2) e F2=(1,2), temos que

$$T(F1)=T(-1,2)=(-1+2\ ,\ (-2)x(-1)+4x2)=(1,10)$$

e

$$T(F2)=T(1,2)=(1+2,(-2)x1+4x2)=(3,6).$$

Então, para obter as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T, expressamos as imagens de F1 e F2 pela como combinação linear dos vetores da base canônica do R^2:

$$T(F1)=(1,10)=1x(1,0)+10x(0,1)$$

e

$$T(F2)=T(3,6)=2x(1,0)+6x(0,1).$$

Assim, obtemos as coordenadas dos focos da elipse após a aplicação de T, em relação à base canônica do R^2. 1 e 10 são as coordenadas da imagem de F1 e, 3 e 6 são as coordenadas da imagem de F2.

C. Os autovalores de T são as raízes λ do polinômio característico, obtidos a partir da resolução da equação (9), onde A é a matriz canônica do operador linear T,descrita em (6), e

$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ a matriz identidade de ordem 2.

Assim, temos que $\det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix}$. O polinômio característico é $(1-\lambda)(4-\lambda)+2=\lambda^2-5\lambda+6$.

E os autovalores são $\lambda=3$ e $\lambda=2$.

O nível de dificuldade desta questão é fácil, pois depende apenas do conhecimento das definições de elipse e autovalores de uma transformação linear. Esses são conteúdos básicos da Geometria Analítica e Álgebra Linear.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Álgebra Linear Contemporânea.* Porto Alegre: Bookman, 2006.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações.* 10. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLBRINI, J.; COSTA, S; WETZLER, H. *Álgebra Linear.* São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

HOFFMANN,K.; KUNZE,R. *Álgebra Linear.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1976.

LEITHOLD, L. *O Cálculo Com Geometria Analítica.* São Paulo: Harbra, 1982.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear.* São Paulo: Mcgraw-Hill do Brasil, 1972.

WINTERLE. P *Geometria Analítica.* 2.ed. São Paulo: Pearson Education, 2014.

STRANG, G. *Álgebra Linear e suas aplicações*. Editora Cengage Learning, 2009.

SWOKOWSKI, E. W. L. *Cálculo Com Geometria Analítica.* São Paulo: Makron Books, 1995.

QUESTÃO 9

O conjunto $M_2(\mathbb{Z})$ é formado pelas matrizes quadradas de ordem 2 com entradas inteiras. Esse conjunto é fechado sob as operações usuais de soma e multiplicação de matrizes, uma vez que as entradas das matrizes resultantes da soma e da multiplicação são números inteiros.

Com relação à estrutura algébrica desse conjunto com as operações descritas, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

I. O conjunto $M_2(\mathbb{Z})$, munido das operações usuais de soma e multiplicação forma um anel.

PORQUE

II. O conjunto $M_2(\mathbb{Z})$, munido das operações usuais de soma de matrizes, forma um grupo e existe o elemento unidade dado pela matriz identidade de ordem 2.

A respeito dessas asserções, assinale a alternativa correta.

A. As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta para I.

B. As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta para I.

C. A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

D. A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

E. As asserções I e II são falsas.

Gabarito: alternativa B

Autoria: Neda da Silva Gonçalves e Thaísa Jacintho Müller

COMENTÁRIO:

Para resolver a questão, é necessário o conhecimento dos conceitos das Estruturas Algébricas de Grupo, Anel e mais especificamente do Anel das Matrizes.

Para escolher a alternativa correta desta questão, vamos realizar uma análise das afirmações apresentadas para após analisar também cada uma das alternativas de resposta.

Afirmativa I: O conjunto $M_2(\mathbb{Z})$, munido das operações usuais de adição e multiplicação forma um Anel.

Sabe-se dos estudos de Álgebra que a adição em $M_2(\mathbb{Z}) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a,b,c,d \in \mathbb{Z}\right\}$ é associativa, comutativa, possui elemento neutro, a matriz nula, e todo elemento possui inverso aditivo. Essas propriedades fazem desse conjunto, com a operação adição, um *grupo abeliano.* Considerando em $M_2(\mathbb{Z})$ a operação multiplicação, sabendo que essa operação é associativa e, ainda, que a multiplicação se distribui sobre a adição, temos, nesse conjunto, um anel com essas operações.

Logo, a Afirmativa I é verdadeira.

Afirmativa II: O conjunto $M_2(\mathbb{Z})$, munido das operações usuais de soma de matrizes, forma um grupo e existe o elemento unidade dado pela matriz identidade de ordem 2.

Já foi observado que o conjunto $M_2(\mathbb{Z})$ é um grupo aditivo e sabe-se também que a matriz identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é o elemento unidade, ou elemento neutro da multiplicação das matrizes quadradas de ordem 2.

Vamos agora à análise das alternativas:

Alternativa A – Falsa

As afirmativas I e II são verdadeiras, mas a II não é justificativa para a I, pois ser um grupo aditivo não é justificativa para ser anel. Além disso, para formar um anel, a multiplicação não necessita possuir elemento neutro. Assim, as propriedades necessárias para que exista um anel não foram citadas.

Alternativa B – Verdadeira

As análises feitas já deixam evidentes as afirmações da alternativa.

Alternativa C, D e E – Falsas

Já comentado.

REFERÊNCIA

GONÇALVES, Adilson. *Introdução* à Álgebra*.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

QUESTÃO 10

No contexto de investimento e formação de capital, se $M(t)$ representa o montante do capital de uma empresa existente em cada instante t e $I(t)$ representa a taxa de investimento líquido por um período de tempo, então

$$M=\int_a^b I(t)dt$$

fornece o montante acumulado no período $a \leq t \leq b$.

Disponível em: < http://www.ime.uerj.br/>. Acesso em: 03 ago. 2014 (adaptado).

Considere que a função $I(t) = t\,\ln(t)$, definida para $t \geq 1$, representa a taxa de investimento líquido, em milhares de reais, de uma empresa de cosméticos. Nesse caso, utilizando $\ln(3) \cong 1,1$, o valor do montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ é igual a

A. R$ 1 100,00.

B. R$ 2 100,00.

C. R$ 2 950,00.

D. R$ 3 750,00.

E. R$ 4 950,00.

Gabarito: alternativa C

Autoria: Eliete Biasotto Hauser

COMENTÁRIO:

O valor do montante acumulado no período $1 \leq t \leq 3$ é obtido integrando a taxa de investimento líquido $I(t) = t\,\ln(t)$, representada graficamente na figura 1 a seguir.

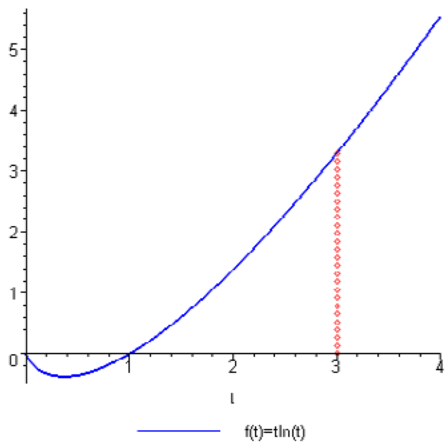


Figura 1

Observamos que $I(t)=t \ln(t)$, está definida pelo produto de duas funções, t e $\ln(t)$.

Cada técnica de diferenciação tem uma correspondente técnica de integração.

O método de **integração por partes** depende da fórmula para o diferencial de um produto (notação de Leibnitz) $d(uv) = udv + vdu$, o qual reescrevemos na forma

$$udv = d(uv) - vdu. \tag{1}$$

Integrando ambos os lados da igualdade (1), obtemos a fórmula conhecida como integração por partes:

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du \tag{2}$$

Dependendo de uma escolha adequada de *u* e *dv* em (2), pode ser mais simples integrar $\int v\, du$ do que $\int u\, dv$.

Assim, para resolver a questão, escolhemos $u = \ln(t)$ e $dv = t\, dt$.

Então, $du = \frac{dt}{t}$ e $v = \frac{t^2}{2}$

Observamos que $\int t \ln t\, dt$ depende do cálculo da integral de menor complexidade $\int \frac{t}{2}\, dt$.

Com efeito, substituindo u, du, v e dv em (2), obtemos:

$$\int t \ln t\, dt = \frac{t^2 \ln t}{2} - \int \frac{t^2}{2t}\, dt = \frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2}{4} + k.$$

Então,

$$M = \int_1^3 t \ln t\, dt = \left[\frac{t^2 \ln t}{2} - \frac{t^2}{4}\right]_1^3 = \frac{9 \ln 3}{2} - \frac{9}{4} - \left(\frac{\text{in } 1}{2} - \frac{1}{4}\right) \cong \frac{9x1{,}1}{2} - \frac{8}{4} = 2{,}95.$$

Isto é, M = 2,95 milhares de reais, e a alternativa correta é a letra C.

O nível de dificuldade desta questão é fácil, pois a técnica de integração por partes é amplamente utilizada em várias disciplinas do curso.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2005. v. 1.

EDWARDS, C.H.; JR., PENEY, D. E. *Cálculo com geometria analítica*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1997.

FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A*: funções, limite, derivação, integração. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

HOFFMANN, L. D. *Cálculo*: um curso moderno e suas aplicações. Rio de Janeiro: LTC, 1990.

LEITHOLD, I. O *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Harbra, 1994. v. 1.

STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: CENGAGE Learning, 2010. v. 1.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1995.

THOMAS, G. B. *Cálculo*. São Paulo: Pearson, 2013. v. 1.

QUESTÃO 11

Em uma loja de material escolar, as mercadorias caneta, lápis e borracha, de um único tipo cada uma, são vendidas para três estudantes. O primeiro comprou uma caneta, três lápis e duas borrachas pagando R$10,00; o segundo adquiriu duas canetas, um lápis e uma borracha pagando R$9,00; o terceiro comprou três canetas, quatro lápis e três borrachas pagando R$19,00.

Os estudantes, após as compras, sem verificaremos valores de cada mercadoria, procuraram resolver o problema: "A partir das compras efetuadas e dos respectivos valores totais pagos por eles, qual o preço da caneta, do lápis e da borracha?". Para isso, montaram um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os preços das mercadorias.

Esse sistema de equações é

A. possível determinado, sendo o preço da borracha mais caro que o do lápis.

B. impossível, pois saber os totais das compras não garante a existência da solução.

C. possível determinado, podendo admitir como solução o valor do preço da caneta, do lápis e da borracha.

D. possível indeterminado, de forma que a soma dos valores possíveis da caneta, do lápis e da borracha é igual a cinco vezes o preço do lápis subtraído de R$9,00.

E. possível indeterminado, de forma que a soma dos valores possíveis da caneta, do lápis e da borracha é igual a 1/5 da adição do preço da borracha com R$28,00.

Gabarito: alternativa E

Autoria: Karina Benato

COMENTÁRIO:

Para resolver esta questão, é necessário o conhecimento dos conceitos sobre sistemas de equações lineares.

Segundo Morettin (2010), chamamos de equação linear nas incógnitas $x_1, x_2, ..., x_n$ toda equação do tipo $a_1x_1+a_2x_2+ \ldots + a_nx_n = b$, em que $a_1, a_2 \ldots , a_n$ são números reais quaisquer chamados de coeficientes e b é um número real chamado termo independente. E um sistema linear é um conjunto de equações lineares nas mesmas incógnitas.

Chamamos de solução de um sistema linear toda sequência de números $\alpha_1, \alpha_2 \ldots , a_n$ que colocados, respectivamente, nos lugares de $x_1, x_2 \ldots , x_n$, tornam todas as igualdades verdadeiras.

Um sistema linear pode ser classificado quanto ao número de soluções:

- **o sistema será possível determinado se tiver uma única solução;**
- **o sistema será possível indeterminado se tiver infinitas soluções;**
- **o sistema será impossível se não tiver nenhuma solução.**

Existem diferentes métodos para a resolução de sistema de equações, tais como adição, substituição, Regra de Cramer, entre outros. Um dos métodos mais simples de ser operacionalizado é o método do escalonamento, também conhecido por método de Gauss, que foi desenvolvido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e posteriormente aperfeiçoado por Wilhem Jordan (1842-1899).

Segundo Boldrini (1980), esse método consiste em aplicar uma sequência finita de operações elementares sobre as equações do sistema linear até se obter, por eliminação de incógnitas, um sistema equivalente, no qual a análise da solução do sistema inicial é feita facilmente. Dois sistemas de equações lineares são equivalentes se, e somente se, toda solução de qualquer um dos sistemas também é solução do outro.

Segundo Morettin (2010), podemos utilizar os seguintes recursos para transformar um sistema *S* num outro sistema equivalente *S`* na forma escalonada:

- **Multiplicando-se os membros de uma equação qualquer de um sistema *S* por um número k ≠ 0, obteremos um sistema *S`* equivalente a *S*.**
- **Substituindo-se uma equação de um sistema *S* pela soma membro a membro dela com outra, obteremos um novo sistema *S`* equivalente a *S*.**

Para escalonarmos um sistema, teremos que seguir alguns passos, todos eles baseados nos dois recursos vistos anteriormente:

- ***Primeiro passo:* anular os coeficientes da1ª variável, da 2ª equação em diante.**
- ***Segundo passo:* deixar de lado a 1ª equação e repetir o primeiro passo com os coeficientes da próxima variável que tenha coeficientes diferente de zero, nas equações remanescentes.**
- ***Terceiro passo:* deixar de lado as duas primeiras equações e repetir o primeiro passo com os coeficientes da próxima variável que tenha coeficiente diferente de zero, nas equações remanescentes.**

Os próximos passos são análogos e devem ser seguidos até que o sistema fique escalonado.

Dessa forma, para escolher a alternativa correta dessa questão, precisa-se primeiramente interpretar o enunciado, montando um sistema com as informações dadas.

Consideremos as três mercadorias dadas no problema, caneta, lápis e borracha, como as nossas três incógnitas e vamos denominá-las, respectivamente, por c, l e b.

O primeiro estudante comprou uma caneta, três lápis e duas borrachas pagando *R*$10,00. Assim, temos a equação: $c+3l+2b=10$.

O segundo estudante comprou duas canetas, um lápis e uma borracha pagando *R*$9,00. Assim, temos a equação: $2c+l+b=9$.

O terceiro estudante comprou três canetas, quatro lápis e três borrachas pagando *R*$19,00. Assim, temos a equação: $3c+4l+3b=19$.

Então, temos o sistema:

$$\begin{cases} c+3l+2b=10 \rightarrow \text{equação 1} \\ 2c+l+b=9 \quad \rightarrow \text{equação 2} \\ 3c+4l+3b=19 \rightarrow \text{equação 3} \end{cases}$$

Aplicando o método do escalonamento descrito anteriormente, teremos:

- ***equação* 2= *equação* 2+(-2)· *equação* 1**

$$\begin{array}{r} 2c+l+b=9 \\ +(\underline{-2c-6l-4b=-20}) \\ -5l-3b=-11 \end{array}$$

- ***equação* 3= *equação* 3+(-3)· *equação* 1**

$$\begin{array}{r} 3c+4l+3b=19 \\ +(\underline{-3c-9l-6b=-30}) \\ -5l-3b=-11 \end{array}$$

- ***equação* 3= *equação* 3+(-1)· *equação* 2**

$$\begin{array}{r} -5l-3b=-11 \\ -(\underline{-5l-3b=-11}) \\ 0b=0 \end{array}$$

Assim, o sistema escalonado é:

Como a última equação é satisfeita para qualquer valor *b*, o sistema tem infinitas soluções e é classificado como possível indeterminado.

Ainda, para determinar a solução correta da questão, vamos considerar b um número real positivo qualquer, ou seja, *b*=*b*.

Na segunda equação, teremos:

$$-5l-3b=-11$$

$$5l+3b=11$$

$$l=\frac{11-3b}{5}$$

Na primeira equação, substituindo as variáveis *b* e *l*, teremos:

$$c+3l+2b=10$$

$$c+3\cdot\left(\frac{11-3b}{5}\right)+2b=10$$

$$c+\frac{33-9b}{5}+2b=10$$

$$\frac{5c+33-9b+10b=50}{\cancel{5}}$$

$$5c=17-b$$

$$c=\frac{17-b}{5}$$

Logo, considerando as três incógnitas definidas inicialmente no problema caneta (*c*), lápis (*l*) e borracha (*b*), a solução do sistema será:

$$S=\left\{\left(\frac{17-b}{5};\frac{11-3b}{5};b\right),\ b\in R_+^*\right\}$$

Consideramos o conjunto R_+^*, uma vez que as incógnitas representam os preços das mercadorias.

Analisando as respostas, vemos que só é possível estarem corretas as alternativas D ou E, uma vez que o sistema é possível indeterminado.

Vamos analisar a alternativa D: "*Possível indeterminado, de forma que a soma dos valores possíveis da caneta, do lápis e da borracha é igual a cinco vezes o preço do lápis subtraído de R*$9,00".

$$c + l + b = 5 \cdot (9 - l)$$
$$\frac{17-b}{5} + \frac{11-3b}{5} + b = 5 \cdot \left(9 - \frac{11-3b}{5}\right)$$
$$\frac{28-4b}{5} + b = 45 - \frac{55}{5} + \frac{15b}{5}$$
$$\frac{28-4b}{5} + \frac{5b}{5} = \frac{225}{5} - \frac{55}{5} + \frac{15b}{5}$$
$$\frac{28+b}{5} = \frac{170+15b}{5}$$
$$-14b = 142$$
$$b = -\frac{142}{14} \cong -10{,}14$$

Logo, a alternativa é falsa uma vez que $b \in R_+^*$ já que as incógnitas representam os preços das mercadorias.

Vamos analisar a alternativa E: *"Possível indeterminado, de forma que a soma dos valores possíveis da caneta, do lápis e da borracha é igual a 1/5 da adição do preço da borracha com R*$ 28,00*".*

$$c + l + b = \frac{1}{5} \cdot (b + 28)$$
$$\frac{17-b}{5} + \frac{11-3b}{5} + b = \frac{b+28}{5}$$
$$\frac{28-4b}{5} + b = \frac{b+28}{5}$$
$$\frac{28-4b+5b}{5} = \frac{b+28}{5}$$
$$\frac{b+28}{5} = \frac{b+28}{5}$$

Assim, provamos que essa alternativa está correta.

O nível de dificuldade dessa questão é considerado baixo, uma vez que os conceitos envolvendo sistema de equações são trabalhados em disciplinas diferentes do currículo e são de fácil compreensão por parte dos alunos.

REFERÊNCIAS

BOLBRINI, J.; COSTA, S.; WETZLER, H. Álgebra Linear. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

MORETTIN, P. A.; HAZZAN, S.; BUSSAB, W. de O. *Cálculo*: função de uma e várias variáveis. 2. ed. São Paulo: Saraiva, 2010.

QUESTÃO 12

Deseja-se pintar a superfície externa lateral de um monumento em forma de um paraboloide, que pode ser descrita pela equação $z=x^2+y^2$, situada na região do espaço de coordenadas cartesianas (x, y, z) dada pela equação $z \leq 9$. Os eixos coordenados estão dimensionados em metros e gasta-se um litro e meio de tinta a cada metro quadrado de área da superfície a ser pintada.

A quantidade de tinta, em litros, necessária para se pintar a superfície lateral do monumento é dada pela integral dupla

A. $4\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}(x^2+y^2)dxdy$

B. $6\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}}(x^2+y^2)dxdy$

C. $4\int_0^{\pi/2}\int_0^3\sqrt{1+4r^2}\ rdrd\theta$

D. $6\int_0^{\pi/2}\int_0^3\sqrt{1+4r^2}\ rdrd\theta$

E. $6\int_0^{\pi/2}\int_{-3}^3\sqrt{1+4r^2}\ rdrd\theta$

Gabarito: alternativa D

Autoria: Marilene Jacintho Müller e Neda da Silva Gonçalves

COMENTÁRIO:

Essa resolução é obtida com conhecimentos de Integral de Superfície, mais especificamente de área de uma superfície com todos os seus elementos: equação vetorial de superfície, vetores tangentes e ortogonais, integral dupla, módulo de um vetor.

Observa-se que a quantidade de litros de tinta, necessária, corresponde a uma vez e meia a medida da área da superfície, em metros quadrados.

Para determinar a área de uma superfície resolve-se uma Integral de Superfície de função escalar que é da forma $\int\int_D f(x,y)dS$, em que os elementos utilizados, para obter-se a área, são dados por:

- ***f*** **(x,y)=*1*;**
- ***dS*=$|\vec{R}_x x \vec{R}_y|$*dA*, com $\vec{R}$ (*x*, *y*)=(*x*, *y*, *x*²+*y*²), equação vetorial da superfície e *dA*=*dx dy*;**
- **$R_x x R_y$, vetor ortogonal à superfície, formado pelo produto vetorial entre os dois vetores que são tangentes, obtidos pelas derivadas parciais $\vec{R}_x$=(1,0,2*x*) e $\vec{R}_x$(0,1,2*y*) e que pode ser calculado segundo a forma mnemônica de determinante:**

$$\vec{R}_x \times \vec{R}_y = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2x \\ 0 & 1 & 2y \end{vmatrix} = (2x, 2y, -1) = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} - \vec{k}$$

- **$|\vec{R}_x x \vec{R}_y|$, módulo do vetor acima que é obtido pela raiz quadrada da soma dos quadrados de suas componentes: $\sqrt{(2x)^2+(2y)^2+1^2} = \sqrt{4x^2+4y^2+1}$. Assim, a integral anterior fica:**

$$\iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy$$

- ***D*, região de integração que será obtida pela projeção da superfície no plano *xy*, uma vez que trabalha-se com uma superfície dada por uma função de variáveis independentes *x* e *y*.**

  Assim, como z ≤ 9, a região de integração é obtida com $z=x^2+y^2 \le 9$, ou seja, um círculo de centro na origem e raio 3.

  Essa região facilita a integração se for feita uma mudança para coordenadas polares:

  x = r cos(Θ)

  y = r sen(Θ)

  0 ≤ r ≤ 3

  0 ≤ Θ ≤ 2π

Realizando a troca de variáveis e efetuando os cálculos algébricos, tem-se:

$$\iint_D \sqrt{4x^2+4y^2+1}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta$$

Essa integral vai fornecer o valor da área procurada.
Cabe agora analisar as alternativas sabendo que em litros deve ser considerado

$$\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\,r\,dr\,d\theta$$

Alternativas (A) e (B)

A integral dupla $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-x^2}} (x^2+y^2)$ apresenta uma inversão nos limites de integração. Os limites não correspondem à ordem de integração dada por $d_x d_y$. Esse fato mostra que as alternativas (A) e (B) não são verdadeiras.

Nas alternativas (C), (D) e (E), pode ser observado o uso de coordenadas polares, citado antes, fato que levou ao desenvolvimento realizado.

Alternativa (C)

A solução $4\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}$ indica 4 vezes a área de ¼ da superfície. Observa-se que, como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, foi considerada apenas ¼ da região D. A alternativa não corresponde ao solicitado pelo exercício, pois fornece apenas a área da superfície e não $\frac{3}{2}$ do valor dessa área.

Alternativa (D)

Observa-se que na alternativa $6\int_0^{\pi/2}\int_0^3 \sqrt{1+4r^2}$ *rdrdΘ* tem-se 6. ¼ (da área), ou seja, $\frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^3 \sqrt{4r^2+1}\, r\, dr\, d\theta$ litros, o que corresponde a uma vez e meia a área da superfície. Desta forma, a alternativa (D) é verdadeira.

Alternativa (E)

A alternativa $6\int_0^{\pi/2}\int_{-3}^3 \sqrt{1+4r^2}$ *rdrdΘ* é falsa, pois o raio do disco (região D), varia de 0 a 3, não assume valores negativos.

Obs.: a resolução do exercício que apresenta a superfície como a representação de uma função em que *z* = *f*(*x,y*) pode ser feita de forma abreviada, usando essa superfície como de nível de uma função em que *w* = z - *f*(*x,y*). Tem-se então o gradiente como ortogonal à Superfície de Nível e pode-se pensar em seu módulo como $\sqrt{\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+1^2}$. Daí por diante mantém-se a mesma resolução.

A questão pode ser classificada como difícil, pois além de dominar os conceitos necessários para calcular a área de superfície e de ter habilidade em efetuar cálculos algébricos, o aluno deverá analisar cada uma das alternativas para decidir qual é a verdadeira.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo.* 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. V.2.

GONÇALVES, Mirian B, FLEMMING, Diva M. *Cálculo B*: Funções de várias variáveis, Integrais Múltiplas, Integrais Curvilíneas e de Superfície. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

QUESTÃO 13

Muitos fenômenos probabilísticos seguem uma lei de distribuição denominada Normal, na qual os valores mais frequentes se encontram próximos à média. A curva que representa essa distribuição tem a forma de um sino, é simétrica em torno da média μ, tem no eixo das abscissas uma assíntota horizontal e é determinada pela seguinte função de densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Levando em consideração que cada curva de distribuição Normal é determinada pela sua média μ e pelo seu desvio-padrão σ, Gauss desenvolveu uma forma de padronizá-las em uma única Normal, caracterizada por ter média 0 e desvio-padrão 1. Assim, a Normal Padrão é determinada pela função $f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, na qual cada um dos valores x da função de distribuição Normal $N(\mu, \sigma)$ é convertido em uma nova variável adimensional, designada genericamente por z, a qual tem distribuição Normal $N(0,1)$. A conversão dessa variável se dá por meio da seguinte expressão: $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$.

Sabe-se que a área sob o gráfico da função de densidade de probabilidade em determinado intervalo fornece a probabilidade de ocorrência de um valor dentro desse intervalo. Assim, considera-se que a área entre a curva Normal e a assíntota determinada pelo eixo das abscissas é igual a 1.

De acordo com dados obtidos no portal do INEP/MEC relativos aos 11 303 estudantes de Licenciatura em Matemática que realizaram a prova do Enade em 2011, a média e o desvio-padrão do desempenho geral desses estudantes foram, respectivamente, iguais a 32,4 e 11,6 pontos.

Considerando que a distribuição do desempenho desses alunos no ENADE 2011 pode ser aproximada pela distribuição Normal, assinale a alternativa cuja expressão fornece o percentual de estudantes com desempenho inferior a 20,8 pontos ou superior a 55,6 pontos.

A. $\int_{-1}^{2} f(z)dz$

B. $\int_{20,8}^{55,6} f(z)dz$

C. $1 - \int_{-1}^{2} f(z)dz$

D. $\int_{11,6}^{32,4} f(z)dz$

E. $1 - \left(\int_{-\infty}^{-1} f(z)dz + \int_{2}^{\infty} f(z)dz\right)$

Gabarito: alternativa C

Autoria: Filipe Jaeger Zabala

COMENTÁRIO:

Para resolver esta questão é necessário o conhecimento dos conceitos de integração (IEZZI, 1977 p. 192-H, ANTON, BIVENS e DAVIS, 2012 p. 316), (função) densidade normal e de sua integral, a (função) distribuição normal (FELLER, 1968 p. 174), conforme descrito no enunciado.

O percentual solicitado de estudantes com desempenho inferior a 20,8 pontos ou superior a 55,6 pontos pode ser baseado em

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(11{,}6)^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-32{,}4}{11{,}6}\right)^2}$$

ou a Normal de média 32,4 e desvio-padrão 11,6, calculando a integral

$$\int_{-\infty}^{20{,}8} f(x)dx + \int_{55{,}6}^{\infty} f(x)dx$$

As alternativas, porém, estão em função de

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

ou a distribuição Normal padrão de média 0 e desvio-padrão 1, e não de *f*(*x*). Desta forma devem-se encontrar os valores de z_1 e z_2 que sejam equivalentes a 20,8 e 55,6. Assim,

$$z_1 = \frac{20{,}8 - 32{,}4}{11{,}6} = -1$$

e

$$z_2 = \frac{55{,}6 - 32{,}4}{11{,}6} = 2$$

Pode-se então reescrever a integral da forma

$$\int_{-\infty}^{-1} f(z)dz + \int_{2}^{\infty} f(z)dz = 1 - \int_{-1}^{2} f(z)dz$$

levando o candidato a decidir pelo item C.

O nível de dificuldade desta questão é baixo, pois a resolução problemas de distribuição normal faz parte do currículo de qualquer disciplina básica de Estatística.

REFERÊNCIAS

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Calculus*. 10th edition. Hoboken: Wiley, 2012.

FELLER, William. *An introduction to probability theory and its applications*: London-New York-Sydney-Toronto: John Wiley & Sons, 1968. Volume I.

IEZZI, Gelson et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Editora Atual, 1977-1983. Volume 8 – Limites, derivadas e noções de integral.

QUESTÃO 14

Um problema muito comum em geometria é o das trajetórias ortogonais, o que equivale a dizer que, dada uma curva de uma família, ela intercepta uma curva da outra família de modo que suas tangentes são perpendiculares entre si, no ponto de interseção. Esse problema pode ser abordado, também, pelo cálculo diferencial e integral e, consequentemente, pelas equações diferenciais ordinárias.

Com o auxílio dessas informações, conclui-se que, para c e k números reais não nulos, no plano de coordenadas cartesianas xOy, a família de trajetórias ortogonais à família de hipérboles xy=c é dada por

A. $x-y^2=k$.

B. $x^2+y=k$.

C. $x^2-y=k$.

D. $x^2+y^2=k$.

E. $x^2-y^2=k$.

Gabarito: alternativa E

Autoria: Eliete Biasotto Hauser

COMENTÁRIO:

Seja G(x,y,c)=0 uma família de curvas no plano xOy em que cada curva é especificada pelo parâmetro *c,* número real não nulo. Quando todas as curvas de uma família G(x,y,c)=0 interceptam todas as curvas de outra família H(x,y,k)=0 sob um ângulo constante w, as famílias G e H são chamadas de **trajetórias** w. Quando w=90º, as famílias G e H são denominadas **trajetórias ortogonais.**

Observamos que, no ponto de intersecção, a ortogonalidades de duas curvas significa a ortogonalidade de suas retas tangentes e que, se duas retas são ortogonais, seus coeficientes angulares são recíprocos opostos (por exemplo, *a* e –1/*a*)**.**

Exemplos de curvas ortogonais são os meridianos e paralelos do globo terrestre e, num campo elétrico, as linhas equipotenciais e as linhas de força, ilustradas na figura 1, a partir de um problema proposto em KREYSZIG (2006).

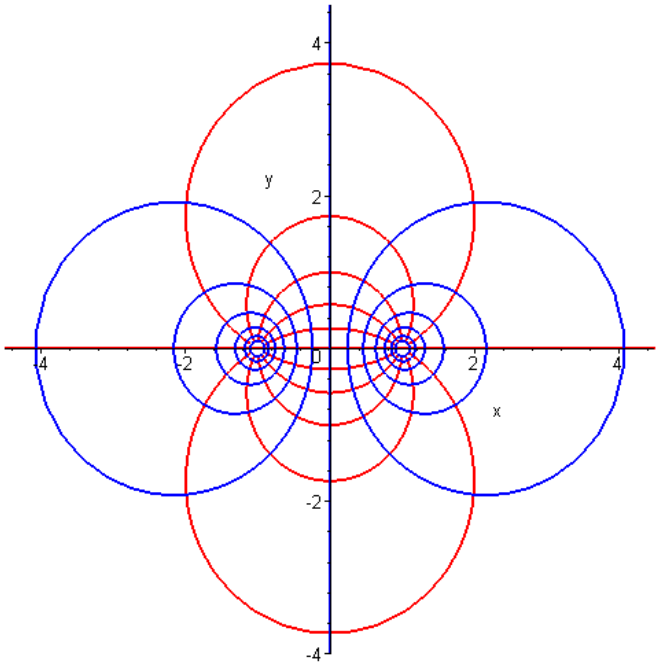


Figura1 – Linhas de força e equipotenciais num campo elétrico.

Técnica para determinar trajetórias ortogonais de uma família de curvas

Passo 1 – Encontrar a equação diferencial ordinária que tem como solução geral G(x,y,c)=0.

Isso é feito derivando parcialmente com respeito a x, ambos os lados da igualdade G(x,y,c)=0. O parâmetro *c* é eliminado.

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial G}{\partial x}}{\frac{\partial G}{\partial y}}. \qquad (1)$$

Obtemos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem que tem como solução geral G(x,y,c)=0. $\frac{dy}{dx}$ é o coeficiente angular da reta tangente a algum membro da família G, num ponto arbitrário (x,y).

Passo 2 – Escrever a equação diferencial que tem como solução geral H(x,y,k)=0, as trajetórias ortogonais de G(x,y,c)=0.

O coeficiente angular da reta tangente a qualquer curva da família *H*(*x*,*y*,*k*)=0 é o recíproco oposto de (1). Assim, *H*(*x*,*y*,*k*)=0 constitui a solução geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}}. \qquad (2)$$

Para resolver a questão proposta, aplicamos a técnica descrita.

Consideramos a família de hipérboles dadas, xy=c, e denotamos $G(x,y,c)=xy-c=0$.

A equação diferencial ordinária, de primeira ordem e de variáveis separáveis, que tem como solução geral a família dada, é construída de forma similar ao realizado para obter (1):

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow y+x\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow x\frac{dy}{dx}=-y \Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x}.$$

Então, de acordo com (2), as trajetórias ortogonais procuradas, constituem a solução geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem de variáveis separáveis

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{\partial G}{\partial y}}{\frac{\partial G}{\partial x}}=\frac{x}{y}.$$

Separando as variáveis ydy=xdx e integrando ambos os lados da igualdade, obtemos $\frac{y^2}{2}=\frac{x^2}{2}+K$. Assim, considerando k=-2K, das alternativas apresentadas, a única correta é a (E):$x^2-y^2=k$.

Como ilustração, na figura 2 são representadas algumas curvas da família *xy=c* e de suas trajetórias ortogonais, $x^2-y^2=k$, para c,k=±1, ±2 e ±3.

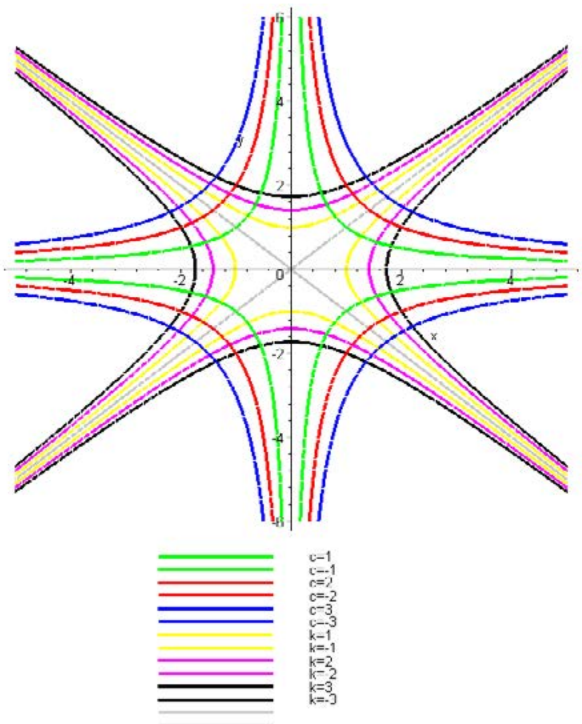


Figura 2 – $x^2 - y^2 = k$ trajetórias ortogonais de xy=c.

O nível de dificuldade desta questão é médio. É necessário aplicar conceitos de ortogonalidade de curvas e retas, derivada de uma função para determinar o coeficiente angular de uma reta e derivadas parciais de função de mais uma variável. Também exige domínio da técnica de separação de variáveis para resolver equações diferenciais ordinárias de primeira ordem.

REFERÊNCIAS

BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* Rio de Janeiro: LTC – Livros Técnicos e Científicos, 2006.

BRONSON, R.; COSTA, G. B. *Equações diferenciais*. Porto Alegre: Bookman, 2008.

HAUSER, E. B.; LUPINACCI, V. L. M., *Aplicação das Equações Diferenciais de primeira ordem: Trajetórias Ortogonais.* Disponível em: <http://webapp.pucrs.br/lapren/servlet/br.pucrs.lapren.controller.ObjetoAprendizagemDinamicoControl?idObjeto_html=112#equipe> Acesso em: 26/10/2016

KREYSZIG, E. A*dvanced Engineering Mathematics*, New York, John Wiley &Sons, Inc. 2006.

NAGLE, R. K.; SAFF, E. B.; SNIDER, A. D. *Equações diferenciais*. São Paulo: Pearson. Education do Brail, 2013.

O'NEILL, Peter V. *Advanced Engineering Mathematics*. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1995.

SIMMONS, G.F.; KRANTZ, S. G. *Equações Diferenciais* – Teoria, Técnica e Prática. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

QUESTÃO 15

Uma função diferenciável, *f*, crescente a partir da origem e situada no primeiro quadrante é tal que a área da região sob seu gráfico e acima do eixo das abscissas, de 0 até *x*, vale um quinto da área do triângulo com vértices nos pontos (0, 0), (*x*, *y*) e (*x*, 0), em que $y = f(x)$.

A equação diferencial que descreve essa situação é

A. $xy' - 9y = x$.

B. $xy' - 9y = 0$.

C. $x^2y' - 9y = 0$.

D. $y' - 9xy = 0$.

E. $y' - 9x^2y = 0$.

Gabarito: alternativa B

Autoria: Augusto Vieira Cardona

COMENTÁRIO:

Para resolver esta questão, é necessário o conhecimento do conceito e de aplicações da integral definida e do Teorema Fundamental do Cálculo. Segundo Thomas (2009), p. 307, se $y = f(x)$ for não negativa e integrável em um intervalo fechado [*a*, *b*], então a área sob a curva $y = f(x)$. em [*a*, *b*] será a integral de *f* de *a* até *b*:

$$A = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Assim, sendo que a função *f*, descrita no problema, é não negativa (crescente a partir da origem e situada no primeiro quadrante) e integrável no intervalo [0, *x*] (sendo diferenciável, logo será contínua e integrável, segundo Thomas (2009), p. 125 e 303), teremos que a área da região sob seu gráfico e acima do eixo das abscissas, de 0 até *x*, ver Figura 1, será igual a $A = \int_a^x f(t)\, dt$.

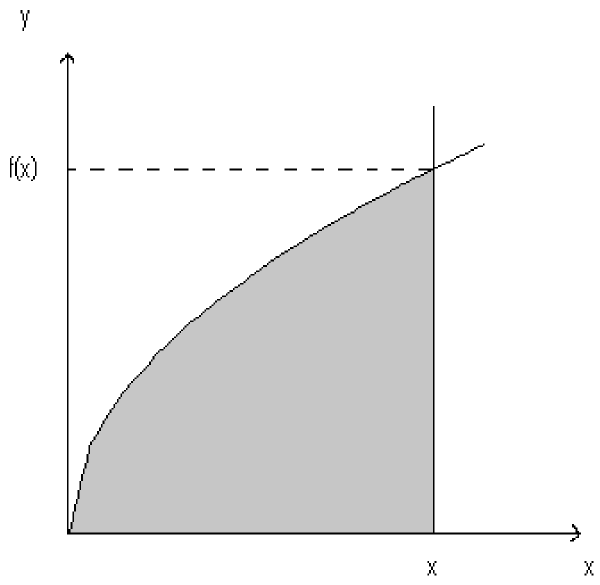


Figura 1 – Área da região sob o gráfico de *y = f(x)* e acima do eixo das abscissas, de 0 até *x*.

Por outro lado, a área do triângulo com vértices nos pontos (0, 0), (*x*, *y*) e (*x*, 0) (ver Figura 2) é a metade do produto da base pela altura deste triângulo, ou seja, $A = \frac{xf(x)}{2}$, , e considerando a hipótese colocada nesse exercício, temos que:

$$\int_a^x f(t)\,dt = \frac{1}{5}\frac{xf(x)}{2} = \frac{xf(x)}{10}.$$

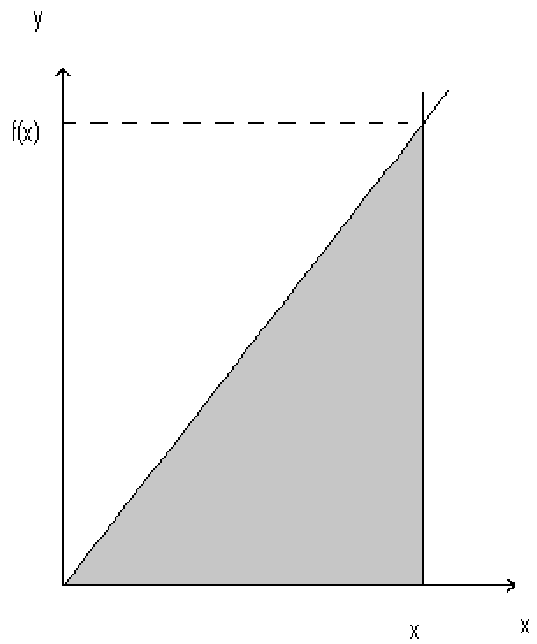


Figura 2 – Área do triângulo com vértices nos pontos (0, 0), (*x*, *y*) e (*x*, 0).

Derivando ambos os lados da igualdade acima em relação à variável *x*, usando a regra da derivada do produto e o Teorema Fundamental do Cálculo, o qual enuncia que “Se f é contínua em [a, b], então $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ é contínua em [a, b] e derivável em (a, b), e sua derivada é f(x): $F'(x) = \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\,dt = f(x)$ " (THOMAS, 2009, p. 315), obtemos a igualdade:

$$f(x) = \frac{f(x) + xf'(x)}{10},$$

a qual, após realizarmos alguns cálculos algébricos e considerarmos que $y = f(x)$, é escrita como $xy' - 9y = 0$, ou seja, conclui-se que a alternativa correta é a (B).

O nível de dificuldade desta questão é baixo, considerando que envolve apenas propriedades e cálculos simples sobre derivação e integração, conceitos básicos para um curso de Matemática.

REFERÊNCIA

THOMAS Jr., G. B.; WEIR, M. D., HASS, J. *Cálculo*. 11. ed. São Paulo: Pearson, 2009. v. 1.

QUESTÃO 16

Considere uma função f: IR → IR diferenciável em todo o seu domínio, com $f'(x) \leq x, \forall x \in IR$. Se f(1) = 1, então, pelo Teorema do Valor Médio, o valor máximo de f(3) é igual a

A. 3.

B. 5.

C. 7.

D. 9.

E. 11.

Gabarito: alternativa C

Autoria: Liara Aparecida dos Santos Leal

COMENTÁRIO:

O Teorema do Valor Médio, também conhecido como Teorema de Lagrange (LIMA, 1976), garante que, se uma função f: [a, b] → IR for contínua e derivável no intervalo aberto (a, b), então existe c ∈ (a, b), tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Considerando as hipóteses da função f: IR → IR do enunciado e aplicando o Teorema do Valor Médio ao intervalo [1, 3], pode-se afirmar que existe $c \in IR$, 1 < c < 3, tal que

$$\frac{f(3) - f(1)}{2} = f'(c)$$

Mas $f'(c) \leq c$, pela hipótese $f'(x) \leq x, \forall x \in IR$.

Logo, $$\frac{f(3) - f(1)}{2} \leq c$$

Sendo f(1) = 1 e c < 3, temos que

$$\frac{f(3) - 1}{2} \leq 3 \quad \Rightarrow \quad f(3) \leq 3.2 + 1 \Rightarrow \quad f(3) \leq 7$$

Portando o valor máximo de f(3) será 7.

REFERÊNCIA

LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1976. Projeto Euclides. v. 1.

QUESTÃO 17

Considere (x_n), $n \in IN$, uma sequência de números reais positivos tal que $x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}$. Nesse caso, $\lim_{n\to\infty} x_n$ é igual a

A. $+\infty$

B. 0

C. x_1

D. 1

E. e

Gabarito: alternativa B

Autoria: Gabriela Wehr

COMENTÁRIO:

Uma sequência infinita de números é uma função cujo domínio é o conjunto de números inteiros positivos. Cada x_n é calculado diretamente a partir do valor de n. No entanto, as sequências são frequentemente definidas recursivamente, fornecendo o(s) valor(es) do termo inicial ou termos iniciais, e uma regra, chamada de fórmula de recursão, para o cálculo de qualquer termo posterior a partir dos termos que o precedem.

Nesta questão, a sequência (x_n) é definida pela relação de recorrência

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}, \quad \text{para } n \geq 1,$$

Dado que

$x_1=2x_2$, $x_2=3x_3$, $x_3= 4x_4$, $x_4=5x_5$, $x_5=6x_6$, ...

Temos que

$\{2x_2, 3x_3, 4x_4, 5x_5, 6x_6 ...\}$ que é equivalente a

$\left\{x_1, \frac{x_1}{2}, \frac{x_1}{6}, \frac{x_1}{24}, \frac{x_1}{120} \dots\right\}$, onde x_1 pode ser qualquer número real.

Basta tomar o limite dessa sequência, que pode ser expresso como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1}{n!} = x_1 \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!} = x_1 . 0 = 0$$

cujos termos se aproximam de 0 conforme n cresce.

Portanto, a alternativa B está correta: $\lim_{n\to\infty} x_n=0$.

O nível de dificuldade desta questão é médio, pois requer a determinação do limite de uma sequência, embora esse conteúdo faça parte do currículo dos cursos de Cálculo, em geral não é de fácil compreensão pelos alunos.

REFERÊNCIA

THOMAS, G. B.; WEIR, M.; HASS, J. *Cálculo*. 12. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. v. 2.

QUESTÃO 18

Em uma festa infantil, um grupo de 7 crianças – Ana, Beatriz, Carlos, Davi, Eduardo, Fernanda e Gabriela – reuniu-se próximo a uma mesa para brincar de “esconde-esconde”, um jogo no qual uma criança é separada dos demais, que procuram locais para se esconder, sem que a escolhida as veja, pois essa tentará encontrá-las após algum tempo estabelecido previamente. Assim, era necessário escolher qual delas seria aquela que iria procurar todas as outras.

Para efetuar essa escolha, as crianças se dispuseram em um círculo na mesma ordem descrita anteriormente e, simultaneamente, mostraram um número de dedos das mãos. Os números de dedos mostrados foram somados, resultando em uma quantidade que vamos chamar de *TOTAL*. Ana começou a contar de 1 até o *TOTAL*, e, a cada número dito, apontava para uma criança da seguinte forma: 1 – Ana, 2 – Beatriz, 3 – Carlos, 4 – Davi, e assim por diante. Quando chegasse ao número *TOTAL*, a criança correspondente a esse número seria aquela que iria procurar as demais.

Se o número *TOTAL* é igual a 64, a criança designada para procurar as demais é

A. Ana.

B. Beatriz.

C. Carlos.

D. Davi.

E. Eduardo.

Gabarito: alternativa A

Autoria: Karina Benato

COMENTÁRIO:

Essa questão pode ser explicada através da Divisão Euclidiana.

Segundo Hefez (2006), mesmo quando um número natural *a* não divide o número natural *b*, é sempre possível efetuar a divisão de *b* por *a* com resto. Pode-se explicar essa afirmação através do seguinte teorema: “Sejam *a* e *b* dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais *q* e *r*, tais que $b=axq +r$, com $r<a$”.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada na referência citada anteriormente.

No teorema o *r* representa o resto da divisão *b* por *a*. Esse resto é justamente o número que interessa para encontrar a criança designada para encontrar as demais no jogo de “esconde-esconde” do problema.

Tem-se um grupo de 7 crianças e o *TOTAL* dado no problema é 64. Ao dividirmos 64 por 7, temos que o resultado é 9 e o resto é 1. Assim, é possível dar 9 voltas completas no grupo de crianças e aquela designada para procurar as demais será a primeira, ou seja, Ana.

Assim, a alternativa correta é a letra A.

REFERÊNCIA

HEFEZ, Abramo. *Elementos de Aritmética*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

QUESTÃO 19

Para realizar seu trabalho cotidiano, um engenheiro civil precisa modelar matematicamente algumas situações. Em determinado projeto, uma situação problema, depois de modelada, recaiu em um sistema de equações lineares com *m* equações e *n* incógnitas, para o qual a matriz dos coeficientes foi denominada *M*. Após a modelagem, o engenheiro descobriu que o posto da matriz ampliada do sistema (*Pa*) era igual ao posto da matriz dos coeficientes (*Pc*) e que ambos, (*Pa*) e (*Pc*), têm valor equivalente ao número de incógnitas do sistema, ou seja, $Pa = Pc = n$.

Admitindo que o modelo construído pelo engenheiro está matematicamente correto, avalie as afirmações que se seguem.

I. A matriz *M* é singular.

II. O sistema de equações lineares modelado admite uma única solução.

III. É impossível encontrar a solução do problema utilizando o sistema conforme modelado.

IV. O valor de *Pc* é calculado obtendo-se a maior ordem possível das submatrizes quadradas de *M* que tenham determinantes não nulos.

É correto apenas o que se afirma em

A. I.

B. II.

C. I e III.

D. II e IV.

E. III e IV.

Gabarito: alternativa D

Autoria: Luiz Eduardo Ourique

COMENTÁRIO:

Conforme o teorema apresentado no livro de Boldrini, um sistema de m equações e n incógnitas admite solução se, e somente se, o posto da matriz ampliada (Pa) é igual ao posto da matriz dos coeficientes (Pc). Além disso, se as duas matrizes têm o mesmo posto p e p =n, a solução será única. Logo, o que se afirma no item II é verdadeiro.

Para calcular o posto de uma matriz M, devemos reduzi-la à forma escada equivalente por linhas; o número de linhas não nulas desta matriz reduzida à forma escada é definido como sendo o posto de M. No entanto, é conhecido o teorema que estabelece que o posto de uma matriz A é dado pela maior ordem possível das submatrizes quadradas de A, com determinantes diferentes de zero. Assim, a afirmação do item IV é verdadeira.

Não se pode afirmar que M é singular, uma vez que não é necessariamente uma matriz quadrada, portanto o item I é falso. Além disto, uma vez que o sistema admite solução única, o que se afirma no item III é falso.

Concluímos, portanto, que a alternativa D é a correta. No Enade 2011, a prova de Matemática apresentou uma questão que analisou alguns itens semelhantes a esta de 2014, conforme pode ser visto em <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/Ebooks/Pdf/978-85-397-0465-1.pdf>. Em relação ao grau de dificuldade, considero que esta é uma questão que pode ser classificada como fácil.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2012.

BOLDRINI, J. L. et al. *Álgebra Linear*. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

HOFFMAN, K. ; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1979.

CASTILHOS, M. B. M; MULLER, T. J. *Enade comentado*: Matemática 2011. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2014. Disponível em: <http://ebooks.pucrs.br/edipucrs/Ebooks/Pdf/978-85-397-0465-1.pdf>. Acesso em: 29 agosto 2016.

QUESTÃO 20

Considere uma parábola de foco *F* e reta diretriz *d*. Denote por *P* um ponto pertencente à parábola e por *D* a sua projeção ortogonal na reta diretriz *d*.

Represente por *r* a reta bissetriz do ângulo $F\hat{P}D$, avalie as asserções a seguir e a relação proposta entre elas.

I. A reta *r* é tangente à parábola no ponto *P*.

PORQUE

II. Para qualquer ponto *Q* pertencente à reta *r*, $Q \neq P$, a distância de *Q* ao ponto *D* é maior que a distância de *Q* à reta *d*.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

A. As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

B. As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

C. A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

D. A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

E. As asserções I e II falsas.

Gabarito: alternativa A

Autoria: Vandoir Stormowski

COMENTÁRIO:

O primeiro passo para a resolução é representar a parábola e os elementos indicados no enunciado. Em seguida, é importante lembrar a definição de parábola, que conforme Delgado, Frensel e Crissaff (2013) são todos os pontos do plano que são equidistantes do foco *F* e da reta diretriz *d*. E dessa forma os segmentos *FP* e *PD* são congruentes.

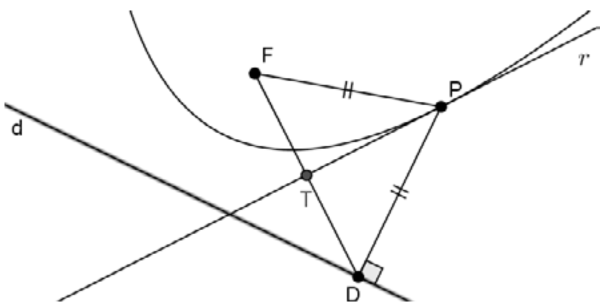


Figura 1– Parábola e elementos adicionais.
Fonte: o autor.

Representando o segmento *FD*, é possível determinar o ponto *T*, interseção da reta r e do segmento *FD*. Já sabendo que *FP* e *PD* são congruentes, que os ângulos $F\hat{P}T$ e $D\hat{P}T$ são congruentes pois *PT* está sobre a bissetriz r, é fácil ver que o segmento *PT* é comum aos triângulos *FPT* e *DPT*. Consequentemente, pelo critério de congruência de triângulos *LAL*, estes triângulos são congruentes. E, dessa forma, *r* é mediatriz do segmento *FD*, já que *FT* e *TD* são congruentes, e os ângulos $F\hat{T}P$ e $D\hat{T}P$ são retos.

Pelas propriedades da mediatriz do segmento *FD*, segundo Dolce (2005), qualquer ponto sobre *r* é equidistante dos pontos *F* e *D*.

Considerando um ponto qualquer *Q* pertencente à reta *r*, $Q \neq P$, e sendo *E* a projeção ortogonal de *Q* sobre a reta diretriz, é possível identificar um triângulo retângulo *QED* com hipotenusa *QD*.

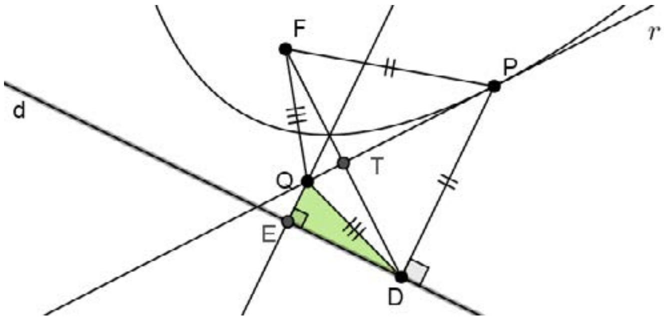


Figura 2 – Ponto qualquer de .

Fonte: o autor

Observe que a hipotenusa *QD* é maior que qualquer um dos catetos do triângulo e assim $\overline{QD} > \overline{QE}$. Como $\overline{QE}$ é a distância de *Q* à reta diretriz *d*, temos que a distância de Q ao ponto *D* é maior que a distância de *Q* à reta *d*. E assim a afirmação II é verdadeira!

O ponto *Q* está sobre a reta *r*, e, portanto, *QD* é congruente à *FD*. Considerando que $\overline{QD}$ é maior que $\overline{QE}$, concluímos que $\overline{FQ} > \overline{QE}$, e, portanto, o ponto não é um ponto da parábola. Consequentemente, a reta *r* é tangente à parábola, pois nenhum outro ponto da reta satisfaz a condição de pertencer à parábola. Dessa forma, a afirmação I é verdadeira!

Ambas as afirmativas são verdadeiras e a II é a justificativa correta para I. Assim a resposta correta é A.

REFERÊNCIAS

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. *Geometria analítica*. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos da matemática elementar 9*: geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

QUESTÃO 21

No estudo de funções de variáveis reais, buscam-se informações sobre continuidade, diferenciabilidade, entre outras. Considere uma função de duas variáveis f:$R^2 \to R$, definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) . \end{cases}$$

A respeito dessa função, avalie as informações a seguir.

I. Ao longo das retas $y = cx$, o valor da função f é constante.

II. A função f é descontínua em (0,0).

III. A função f satisfaz $|f(x,y)| < \dfrac{1}{2}$, quaisquer que sejam $(x, y) \in R^2$ com $x \neq y$.

É correto o que se afirma em

A. II, apenas.

B. III, apenas.

C. I e II, apenas.

D. I e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa A

Autoria: Marilene Jacintho Müller

COMENTÁRIO:

A questão envolve conhecimentos do cálculo de funções de diversas variáveis. Os conceitos necessários para resolvê-la referem-se, especificamente, às funções de duas variáveis reais, entre eles, o de limite e continuidade.

Analisando as três afirmações, observa-se o exposto a seguir.

Afirmação I

Fazendo $y=cx$, pode-se afirmar que

$f(x,cx)=\dfrac{x^2(cx)^2}{x^4+(cx)^4}=\dfrac{c^2x^4}{x^4+c^4x^4}=\dfrac{c^2x^4}{x^4(1+c^4)}=\dfrac{c^2}{1+c^4}$, isto é, a imagem da função vai depender do valor de "c" e, por essa razão, **não** se mantém constante. Dessa forma, a alternativa é falsa.

Afirmação II

Deixa claro que a Afirmação II é verdadeira. Sabe-se que para a função ser contínua no ponto (0, 0) deve-se ter $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}=f(0,0)=0$. Tratando-se de uma função de duas variáveis, para que o limite exista, deverá ser o mesmo através de qualquer caminho que chegue ao ponto (0,0). Logo, se for utilizado o caminho $\boldsymbol{y = cx}$, tem-se:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^4+y^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(cx)^2}{x^4+(cx)^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{c^2x^4}{x^4+c^4x^4}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{c^2x^4}{x^4(1+c^4)}=\frac{c^2}{1+c^4}.$$

O resultado obtido mostra que o limite vai ser diferente para cada valor de "*c*" e, portanto, não existe, o que torna a função descontínua em (0,0).

Afirmação III

Ao determinar $f(-a,\ a)$obtém-se:

$f(-a,a)=\dfrac{(-a)^2.a^2}{(-a)^4+a^4}=\dfrac{a^2.a^2}{a^4+a^4}=\dfrac{a^4}{2a^4}=\dfrac{1}{2}$. Assim, para cada valor de $a\neq 0, f(-a,a)=\dfrac{1}{2}$. o que mostra que a afirmação é falsa.

Com essas análises tem-se que a única alternativa correta é a (A).

Pode-se considerar que o nível de dificuldade dessa questão é médio, uma vez que tratar com funções de duas variáveis reais é mais complexo do que com funções de uma variável real. Além disso, calcular limites e verificar se uma função de duas variáveis é contínua num ponto requer habilidade de cálculo e conhecimento de propriedades e de conceitos que não são elementares.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 2.

STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002. v. 2.

QUESTÃO 22

Um dos problemas mais importantes estudados pelo cálculo diferencial e integral diz respeito à maximização e minimização de funções. Um desses problemas está relacionado à função cúbica definida por

$$f(x)= ax^3+bx^2+cx+d,$$

em que a,b,c e d são constantes reais, com $a \neq 0$.

Acerca dessa cúbica, avalie as informações a seguir.

I. A função f possui apenas um ponto de inflexão, independentemente dos valores de a,b,c e d.

II. Se $b^2 - 3ac > 0$, então f possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local.

III. Se f possui um ponto de máximo local e um ponto de mínimo local, então a média aritmética das abscissas desses dois pontos extremos corresponde à abscissa do ponto de inflexão.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. II, apenas.

C. I e III, apenas.

D. II e III, apenas.

E. (E) I, II e III.

Gabarito: alternativa E

Autoria: Marilene Jacintho Müller

COMENTÁRIO:

A questão é relativa às aplicações da derivada e para resolvê-la é necessário buscar, no Cálculo Diferencial e Integral, conceitos e teoremas relativos ao estudo do comportamento de uma função.

As três afirmações devem ser analisadas e para isso é preciso conhecer as derivadas da função f dada por $f(x)= ax^3+bx^2+cx+d$, citada na questão.

$f'(x)= 3ax^2 +2bx +c$, $f''(x) = 6ax +2b$ +e $f'''(x)=6a$.

Para testar a afirmação I, deve-se igualar a zero a expressão obtida como derivada segunda. O resultado da equação será um possível ponto de inflexão.

Assim, se $f''(x) = 6ax +2b$ += 0

$$6ax = -2b \Rightarrow x = \frac{-2b}{6a} = -\frac{b}{3a}.$$

Para ter certeza de que a solução encontrada é realmente um ponto de inflexão deve-se verificar se a terceira derivada é diferente de zero, ou seja, f'''(x) ≠ 0.

Como $f'''(-\frac{b}{3a}) = 6a \neq 0$, já que $a \neq 0$, a podemos afirmar que $-\frac{b}{3a}$ é o único ponto de inflexão da *f*.

Dessa forma, conclui-se que a afirmação I é verdadeira.

A análise da afirmação II envolve o conhecimento da definição de máximo local, de mínimo local e de ponto crítico de funções de uma variável real.

Como os pontos de máximo ou de mínimo se encontram em pontos críticos e uma função polinomial é derivável em todos esses pontos, deve-se procurá-los somente em raízes da derivada primeira, ou seja,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2 - 4.3a.c}}{6a} = \frac{-2b \pm 2\sqrt{b^2 - 3ac}}{6a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}$$

Se b^2-3ac>0 têm-se duas soluções reais, x'e x'', e diferentes para essa equação. Assim, como $f''(x) = 6ax + 2b$, pode-se dizer que

$$f''\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) = 6a\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + 2b = 2\left[-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac} + b\right] = 2(\pm\sqrt{b^2 - 3ac})$$

Observa-se que a solução apresenta um valor positivo, ponto de mínimo e outro negativo, ponto de máximo, relativos, o que mostra que a afirmação II é verdadeira.

Para analisar a alternativa III, deve-se determinar a média aritmética dos dois pontos extremos, obtidos anteriormente:

$$M_A = \frac{x'+x''}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 3ac}}{3a}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{-b-b}{3a}\right) = \frac{-2b}{2(3a)} = -\frac{b}{3a},$$

ponto de inflexão, já determinado no início da solução. Conclui-se, então, que a afirmação III também é verdadeira e, com isso, a alternativa (E) é a correta.

Entende-se que o nível de dificuldade da questão é médio, pois embora o assunto seja objeto de estudo das disciplinas de Cálculo, não basta o conhecimento de definições e propriedades para resolvê-la. Exige, também, habilidade no cálculo de derivadas de funções de uma variável e o trabalho com cada uma das afirmativas apresentadas, para poder escolher a resposta.

REFERÊNCIAS

ANTON, H.; BIVENS, I.; DAVIS, S. *Cálculo*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v. 1.

FLEMMING, D.; GONÇALVES, M. *Cálculo A*: funções, limite, derivação, integração. 6. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

QUESTÃO DISCURSIVA 4

O número de ouro é conhecido há mais de dois mil anos, sendo encontrado nas artes, nas pirâmides do Egito e na natureza. Para construir o número de ouro apenas com o auxílio de uma régua não graduada e de um compasso, utiliza-se o seguinte procedimento: dado um segmento AB qualquer, marca-se o seu ponto médio; constrói-se o segmento BC perpendicular a AB e com a metade do comprimento de AB; marca-se o ponto E sobre a hipotenusa do triângulo ABC, tal que $\overline{EC}$ e $\overline{BC}$ sejam iguais; e determina-se o ponto D no segmento AB tal que $\overline{AD}$ e $\overline{AE}$ sejam iguais. Com esse procedimento, o ponto D divide o segmento AB na razão áurea.

A partir da construção geométrica do número de ouro e considerando x como o comprimento do segmento AB, faça o que se pede nos itens a seguir, apresentando os cálculos utilizados na sua resolução.

A. Determine o comprimento do segmento AC em função de x. (valor: 4,0 pontos)

B. Determine o comprimento do segmento AD em função de x. (valor: 4,0 pontos)

C. Determine o número de outro dado pelo quociente $\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$. (valor: 2,0 pontos)

Autoria: Vandoir Stormowski

COMENTÁRIO:

Conforme o próprio enunciado salienta, o número de ouro é conhecido há milhares de anos e se estendeu para além da matemática, tendo aplicações na arte, na arquitetura etc. Também é denominado pela letra grega φ (lê-se “fi”), e o valor representa a razão entre duas medidas de segmentos, de modo que a essa proporcionalidade muitas vezes são vinculados conceitos de algo que é “belo”. Essa razão específica é obtida a partir da proporção entre medidas de determinados segmentos, obtidos usualmente a partir de um retângulo específico (retângulo áureo), embora também possa ser observada em pentágonos regulares e triângulos específicos.

O enunciado desta questão apresenta a construção de um triângulo que precisa ser compreendida adequadamente para que se chegue à solução. A mesma construção também é encontrada em Ribordy (2012, p. 49), quando o autor analisa a relação do número de ouro com as proporções do corpo humano e as unidades de medidas decorrentes (palmo, pé, etc.).

Para a resolução, é importante seguir com atenção os passos para a representação do triângulo e cada um dos pontos indicados.

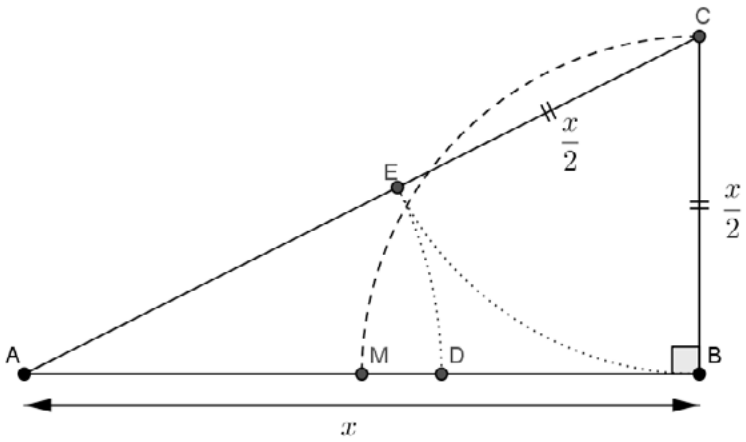


Figura 1 – Construção do enunciado.

Fonte: o autor.

Com base nos elementos dessa construção, é possível responder a cada um dos itens da questão. Nestes comentários, está sendo utilizada a mesma notação presente no enunciado: indica o segmento com extremidades nos pontos e , e é o comprimento deste segmento.

a) Determine o comprimento do segmento *AC* em função de *x*. (valor: 4,0 pontos)

Observe que o triângulo *ABC* é retângulo em *B* por construção, e portanto basta utilizar o Teorema de Pitágoras para obter o valor de $\overline{AC}$.

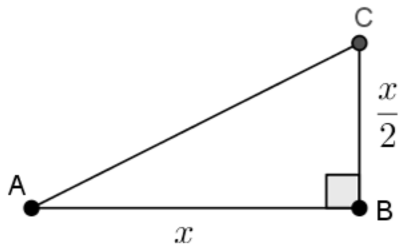


Figura 2 – Triângulo *ABC*.

Fonte: o autor.

$$(\overline{AC})^2 = x^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$$

$$(\overline{AC})^2 = x^2 + \frac{x^2}{4}$$

$$(\overline{AC})^2 = \frac{5x^2}{4}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{\frac{5x^2}{4}}$$

$$\overline{AC} = \frac{x\sqrt{5}}{2}$$

b) Determine o comprimento do segmento AD em função de x. (valor: 4,0 pontos)

Neste caso é preciso observar que *AD* e *AE* possuem mesma medida, e o mesmo ocorre com *BC* e *EC*. Assim, considerando que $\overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC}$, temos:

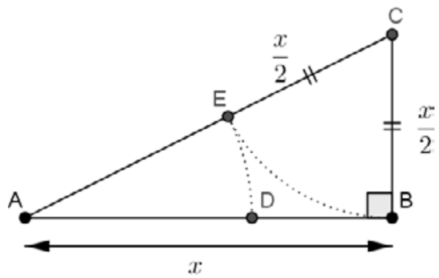


Figura 3: relação entre segmentos.

Fonte: o autor.

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \overline{AC} - \overline{EC}$$

$$\overline{AD} = \overline{AE} = \frac{x\sqrt{5}}{2} - \frac{x}{2}$$

$$\overline{AD} = \frac{x\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$$

c) Determine o número de outro dado pelo quociente $\frac{AB}{AD}$. (valor: 2,0 pontos)

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{x}{\frac{x\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{2\left(\sqrt{5}+1\right)}{4}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

E dessa forma obtemos o valor do número de ouro $\varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1{,}618\ldots$

REFERÊNCIAS

DOLCE, Osvaldo. *Fundamentos da matemática elementar 9*: geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

LIVIO, Mario. *Razão áurea*: a história de Fi, um número surpreendente. Rio de Janeiro: Record, 2015.

RIBORDY, Léonard. *Arquitetura e geometria sagradas pelo mundo*: à luz do número de ouro. São Paulo: Madras, 2012.

QUESTÃO DISCURSIVA 5

A Torre de Hanói foi inventada por Edouard Lucas em 1883. Há uma história sobre a Torre, imagina pelo próprio Lucas:

No começo dos tempos, Deus criou a Torre de Brahma, que contém três pinos de diamante e colocou no primeiro pino 64 discos de ouro maciço. Deus, então, chamou seus sacerdotes e ordenou-lhes que transferissem todos os discos para o terceiro pino, seguindo certas regras. Os sacerdotes, então, obedeceram e começaram o seu trabalho, dia e noite. Quando eles terminassem, a Torre de Brahma iria ruir e o mundo acabaria.

Disponível em: <http://www.obm.org.br > (adaptado). Acesso em: 17 set. 2014

Esse é um dos quebra-cabeças matemáticos mais populares, que consiste de n discos com um furo em seu centro de tamanhos diferentes e de uma base com três pinos na posição vertical onde são colocados os discos. O jogo mais sinples é constituído de três pinos, mas a quantidade pode variar deixando o jogo mais difícil à medida que o número de discos aumenta. Os discos formam uma torre onde todos são colocados em um dos pinos em ordem decrescente de tamanho. O objetivo do quebra-cabeça é transferir toda a torre de discos para um dos outros pinos, que estão inicialmente vazios, de modo que cada movimento é feito somente com um disco, nunca havendo um disco maior sobre um disco menor, como mostra a figura ao lado.

Disponível em: <http://www.puzzlesdeingenio.com >. Acesso em: 17 set. 2014

Considerando uma Torre de Hanói de 3 pinos, faça o que se pede nos itens a seguir.

A. Ao planejar uma aula de matemática utilizando-se a Torre de Hanói, quais seriam os objetivos a serem alcançados de acordo com o s Parâmetros Curriculares Nacionais e o que se espera com o uso de jogos no processo de ensino-aprendizagem? (valor: 3,0 pontos)

B. Cite Três conceitos matemáticos da Educação Básica que podem ser explorados em sala de aula utilizando-se a Torre de Hanói? (valor 3,0 pontos)

C. Obtenha uma fórmula para o número mínimo de movimentos necessários para resolver a Torre de Hanói com discos. Justifique a sua resposta. (valor: 4,0 pontos)

Autoria: Daniela Rodrigues Ribas

COMENTÁRIO:

A.

Os Jogos são atividades desafiadoras que, além de realizadas em grupo, podem ser realizadas individualmente. Oferecem obstáculos a serem transpostos e regras a serem seguidas. Contribuem para que o participante desenvolva a capacidade de perseverar na superação de obstáculos, na busca de um fim a ser atingido, desenvolvendo habilidades, tanto de ordem afetiva como cognitiva.

Trazem para a escola o lúdico, o que os torna de grande valor na sala de aula como motivador da aprendizagem, pois é preciso que se leve em conta que a disposição lúdica é parte integrante da natureza do homem e seu equipamento de sobrevivência.

Organizam-se em torno de algum objeto concreto capaz de pôr em movimento os conhecimentos e as habilidades dos participantes. Nesses processos, diferentes situações podem ser vivenciadas, criando-se, ao mesmo tempo, oportunidades de aprender, pois há sempre o intenso envolvimento dos participantes. O contexto lúdico dos jogos é interessante para o desenvolvimento de autorias, em que os participantes podem tornar-se mais autônomos e mais espontâneos, desenvolvendo suas próprias potencialidades e interesses.

Como resolução de problemas, têm a meta de resgatar a vontade de aprender, por meio do caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais. A resolução de problemas consiste em um procedimento didático ativo, uma vez que o aluno é colocado diante de uma situação-problema para a qual tem que apresentar sugestões de solução. Essa estratégia considera que ensinar é apresentar desafios que estimulem o pensamento reflexivo e que aprender é a busca de uma solução satisfatória para os problemas apresentados. Para isso, o professor pode utilizar questionamentos adequados, estimulando o aluno a resolver desafios.

Os jogos agradam crianças, adolescentes e adultos, tanto pelos desafios que lhes são propostos como pela sua superação. Desenvolvem o pensamento lógico através da interpretação de informações, do levantamento de hipóteses, da análise das possibilidades de solução e da superação dos erros, proporcionando o “aprender a aprender”. Atuam no âmbito das atitudes desenvolvendo o “aprender a ser” e na socialização dos sujeitos, levando-os a “aprender a conviver”. Nesse sentido, jogos bem escolhidos e bem orientados são importantes para o desenvolvimento de potencialidades pessoais no que se refere à organização, à atenção, à disciplina, à responsabilidade, ao pensamento autônomo e à criticidade, à criatividade e ao senso ético. Jogos que enfatizam a resolução de problemas como forma de aprender no seu sentido mais amplo, principalmente quando bem orientados, são ricos em possibilidades de ensino e de aprendizagem.

A Torre de Hanói é um exemplo de jogo que pode ser proposto em sala de aula com o intuito de desenvolvermos as situações elencadas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais, alguns dos objetivos que podem ser alcançados ao planejar uma aula de Matemática utilizando-se a Torre de Hanói são levar o aluno a:

- **identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;**
- **resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como dedução, indução, intuição, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;**
- **comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;**
- **estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;**
- **sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;**

- **interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.**
- **desenvolver atitudes favoráveis para a aprendizagem de Matemática.**
- **confiar na própria capacidade para elaborar estratégias pessoais diante de situações-problema.**
- **valorizar a troca de experiências com seus pares como forma de aprendizagem.**
- **vivenciar processos de resolução de problemas, percebendo que para resolvê-los é preciso compreender, propor e executar um plano de solução, verificar e comunicar a resposta.**
- **ter perseverança, esforço e disciplina na busca de resultados.**
- **ter segurança na defesa de seus argumentos e flexibilidade para modificá-los.**
- **respeitar pelo pensamento do outro, valorização do trabalho cooperativo e do intercâmbio de ideias, como fonte de aprendizagem.**

B.

Alguns conceitos matemáticos da Educação Básica que podem ser explorados em sala de aula utilizando-se a Torre de Hanói são: contagem, ordenação, funções, progressões.

C.

Inicialmente, através de uma tabela, podemos pensar, intuitivamente, em como se comporta o número mínimo de movimentos de acordo com o número de discos:

Número de discos	Número mínimo de movimentos
1	$1 = 2^1 - 1$
2	$3 = 2^2 - 1$
3	$5 = 2^3 - 1$
4	$7 = 2^4 - 1$
5	$15 = 2^5 - 1$

A tabela nos sugere que, para n discos (sendo $n \geq 1$), o número mínimo de movimentos é $2^n - 1$. O que pode ser demonstrado utilizando o Princípio de Indução Matemática.

Observação: o enunciado utiliza “o jogo mais simples é constituído de três pinos, mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que o número de discos aumenta”. No entanto, o correta seria “ o jogo mais simples é constituído de três discos, mas a quantidade pode variar, deixando o jogo mais difícil à medida que o número de discos aumenta”.

REFERÊNCIAS

BAIRRAL, Marcelo Almeida. Movendo discos, construindo torres e matematizando com futuros professores. *Boletim GEPEM* n. 38, pp. 95-110, fev./2001. Disponível em: <http://www.gepeticem.ufrrj.br/ambiente/docs/publicacao/Artigo_nbsp_Hanoi_nbsp_Gepem_nbsp_38.rtf>. Acesso em: jan. 2017.

BRASIL. *Parâmetros Curriculares Nacionais.* Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica: Brasília (DF), 1997. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf>. Acesso em: jan. 2017.

HEFEZ, A. *Elementos de Aritmética.* 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

KISHIMOTO, Tizuko Morchida. *Jogo, brinquedo, brincadeira e a educação*. 3. ed. São Paulo: Editora Cortez, 1999.

RIZZO, Gilda. *Jogos inteligentes*: a construção do raciocínio na escola. Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil, 2001.

SANTOS, Santa Marli Pires dos (Org.). *O lúdico na formação do educador.* Petrópolis: Editora Vozes, 2002.

QUESTÃO 23

Um professor de Matemática, após trabalhar pontos notáveis e áreas de triângulos com uma de suas turmas, propõe a seguinte atividade aos alunos: divida um triângulo escaleno, no qual os ângulos internos são inferiores a 90º, em três triângulos de mesma área.

Avalie as seguintes propostas de solução feitas pelos estudantes.

I. Os triângulos *ABH*, *BCH* e *CAH*, em que *H* é o ortocentro de *ABC*, têm a mesma área.

II. Os triângulos *ABI*, *BCI* e *CAI*, em que *I* é o incentro de *ABC*, têm a mesma área.

III. Os triângulos *AMC*, *ANM* e *ABN,* em que *M* e *N* dividem o lado *CB* em três partes de mesma medida, têm a mesma área.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. III, apenas.

C. I e II, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa B

Autoria: Vandoir Stormowski

COMENTÁRIO:

O triângulo escaleno do enunciado deve ter ângulos internos inferiores a 90º e, portanto, será um triângulo escaleno acutângulo.

A questão envolve dois conceitos importantes de triângulos: ortocentro e incentro.

Conforme Dolce (2005), ortocentro de um triângulo é ponto de interseção das retas suportes das alturas relativas a cada um dos lados, e incentro de um triângulo é o ponto de interseção das bissetrizes internas.

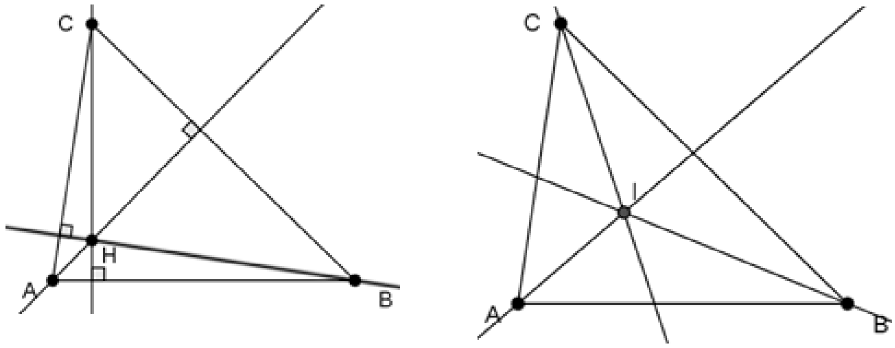


Figura 1 – Definição de ortocentro e incentro.

Fonte: o autor.

Com base nessas definições, é possível analisar as afirmativas.

I. Os triângulos *ABH*, *BCH* e *CAH*, em que *H* é o ortocentro de , têm a mesma área.

A afirmativa é falsa. O enunciado faz referência que o triângulo *ABC* deve ser acutângulo, para garantir que o ortocentro *H* seja interno ao triângulo, para que assim o triângulo *ABC* possa ser dividido em outros três triângulos.

Para garantir que a afirmativa é falsa, basta um único exemplo em que a afirmativa seja falsa, ou seja, precisamos de um contraexemplo.

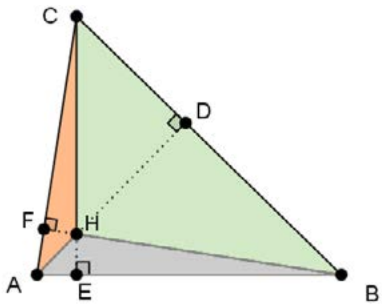


Figura 2 – Divisão a partir do ortocentro.

Fonte: o autor.

E para isso basta ver o exemplo da figura 2, que evidencia que a área dos triângulos *ABH*, *BCH* e *CAH* é muito distinta nesse caso. E, em muitos outros casos, também. É fácil verificar que o único caso em que o ortocentro determina dessa forma triângulos de mesma área ocorre quando o triângulo *ABC* é equilátero, o que não é o caso do triângulo escaleno desta questão.

II. Os triângulos *ABI*, *BCI* e *CAI*, em que *I* é o incentro de *ABC*, têm a mesma área.

Afirmativa falsa. Observe que o ponto *I* está sobre as bissetrizes dos ângulos do triângulo *ABC*, e, conforme Dolce (2005), qualquer ponto da bissetriz é equidistante dos lados (isso é facilmente demonstrado com congruências de triângulos) do ângulo. Assim, o ponto *I* é equidistante de cada um dos lados do triângulo *ABC*, ou seja, os triângulos *ABI*, *BCI* e *ACI* possuem alturas de mesma medida.

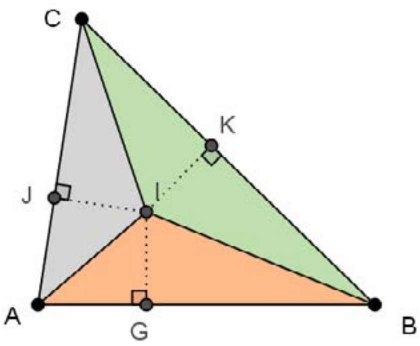


Figura 3 – Divisão a partir do incentro.

Fonte: o autor.

O triângulo *ABC* é escaleno e portanto cada um dos lados possui medida distinta. Lembrando que a área de um triângulo depende da base e da altura, e tendo alturas de mesma medida e bases de medidas distintas, as áreas dos triângulos *ABI*, *BCI* e *ACI* são diferentes.

III. Os triângulos *AMC*, *ANM* e *ABN* em que *M* e *N* dividem o lado *CB* em três partes de mesma medida, têm a mesma área.

Afirmativa verdadeira. Os triângulos *AMC*, *AMC* e *ANB* possuem as bases *CM*, *MN* e *NB*, respectivamente. E como *M* e *N* dividem *CB* em três partes de mesma medida, temos que as bases dos triângulos são congruentes (obs.: o enunciado possui certa imprecisão neste item, pois se a ordem dos pontos *C*, *M*, *N* e *B* for alterada para *C*, *N*, *M* e *B*, a afirmativa passaria a ser falsa.)

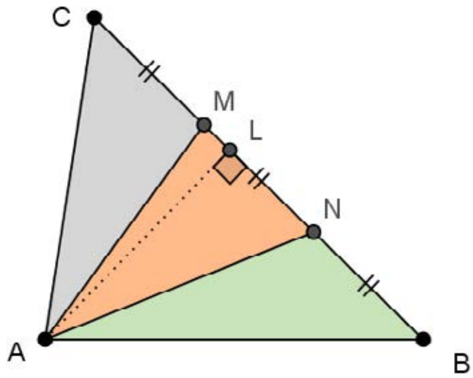


Figura 4 – Divisão a partir dos pontos e .

Fonte: o autor.

Observe que a altura dos triângulos *AMC*, *ANM* e *ANB* é a mesma, indicada pelo segmento *AL* na figura. Tendo bases congruentes e mesma altura, os triângulos possuem mesma área.

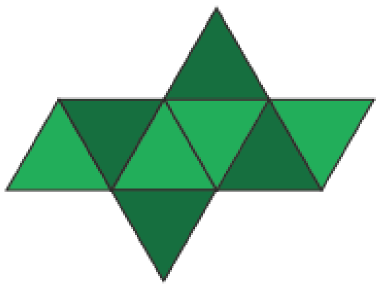
Portanto, das três afirmativas, a única verdadeira é a afirmativa III, e assim a resposta correta é a alternativa B.

REFERÊNCIA

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. *Fundamentos da matemática elementar 9*: geometria plana. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005.

QUESTÃO 24

Uma tendência no ensino de geometria é adotar metodologias que partem de uma situação problema, oportunizando o envolvimento do aluno na manipulação de material concreto, construções, experimentações e conjecturas para a construção do seu conhecimento. Nessa perspectiva, um professor propõe aos seus alunos que determinem a quantidade de papel necessário para confeccionar balões para enfeitar a festa junina da escola. Deseja-se fazer 10 balões de diversas cores. O professor informa que devem ser comprados 20% a mais de papel de cada cor, devido a recortes, colagem e perdas eventuais. Além disso, os balões devem ter a forma de um octaedro regular cuja planificação está representada na figura abaixo.



Os alunos observam, pela planificação do octaedro, que ele é um sólido com 8 faces semelhantes, sendo todas elas triângulos equiláteros. Em certa fase do trabalho, eles concluem que, para obter a resposta do problema, precisam saber que altura o professor quer que os balões tenham. Nesse momento, o professor informa que deseja um balão cuja característica seja ter todas as faces com 20 centímetros de altura.

Com base nessas informações, a quantidade total de papel necessária para confeccionar os 10 balões solicitados, em metros quadrados, é igual a

A. $\frac{4\sqrt{3}}{75}$.

B. $\frac{8\sqrt{3}}{25}$.

C. $\frac{4\sqrt{3}}{25}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{75}$.

E. $\frac{32\sqrt{3}}{25}$.

Gabarito: alternativa E

Autoria: Vandoir Stormowski

COMENTÁRIO:

Neste caso, além da área dos oito triângulos equiláteros que compõem o octaedro, é preciso considerar que serão confeccionados 10 balões, bem como a margem de segurança de 20% a mais de papel.

O enunciado informa que a altura do triângulo equilátero é de 20 centímetros, ou seja, 0,2 metros, e a partir disso é necessário calcular a área do triângulo equilátero *ABC*.

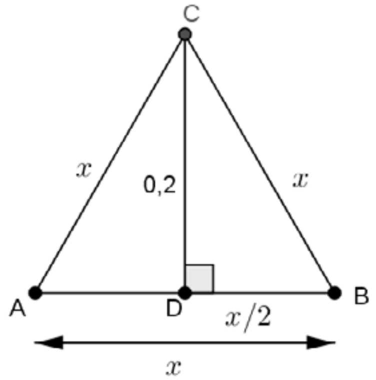


Figura 1 – Triângulo .
Fonte: o autor.

A altura do triângulo *ABC* relativa ao lado *AB* é o segmento *CD* que é perpendicular a *AB*, e como é um triângulo equilátero, *D* é ponto médio de *AB*. Desta forma aplicamos o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo *DCB*:

$$x^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + 0{,}2^2$$

$$x^2 - \frac{x^2}{4} = 0{,}04$$

$$\frac{3x^2}{4} = \frac{4}{100}$$

$$x^2 = \frac{16}{300}$$

$$x = \frac{4}{10\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{15}$$

E, portanto, para calcular a área do triângulo equilátero temos:

$$A_1 = \frac{x \cdot h}{2}$$

$$A_1 = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{15} \cdot \frac{1}{5}}{2}$$

$$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{75}$$

O octaedro possui oito desses triângulos, e portanto

$$A_8 = 8 \cdot A_1 = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{75} = \frac{8\sqrt{3}}{75}.$$

É importante lembrar que serão confeccionados 10 balões e acrescido um percentual de 20% (logo serão 120%), logo o papel total necessário será

$$A_T = 10 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{75} \cdot 120\%$$

$$A_T = 10 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{75} \cdot \frac{120}{100}$$

$$A_T = 10 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{75} \cdot \frac{120}{100}$$

$$A_T = \frac{32\sqrt{3}}{25}$$

A reposta correta é a alternativa E.

REFERÊNCIA

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos da matemática elementar 10: geometria espacial, posição e métrica. 6. ed. São Paulo: Atual, 2005.

QUESTÃO 25

As políticas educacionais no Brasil e no mundo têm avaliado a qualidade da educação, ou mesmo das políticas públicas, por meio de indicadores quantitativos. A análise de um indicador não pode ser feita sem levar em consideração as características do meio em que ele está inserido. Por sua natureza, um indicador fornece uma visão parcial do que se pretende aferir. Essa parcialidade é inerente ao método, ao processo ou às escolhas para a constituição do indicador.

De qualquer forma, indicadores educacionais como taxas de acesso, de repetência, de reprovações, de defasagem idade-série e de evasão são sinais que orientam uma avaliação diagnóstica no que diz respeito às suas implicações com a permanência e o sucesso dos estudantes nas escolas.

Observe os gráficos abaixo, que contêm alguns indicadores do ensino médio brasileiro no período de 2001 a 2012.

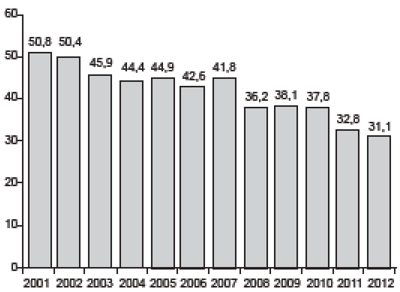


Gráfico 1 – Evolução da taxa percentual de defasagem idade--série no Ensino Médio - Brasil 2001-2012.

Fonte: Inep (2013).

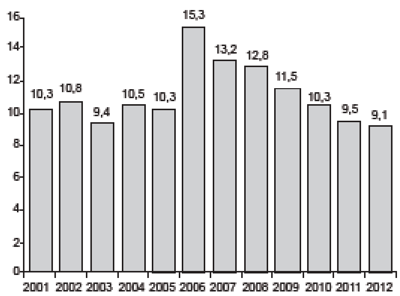


Gráfico 2 – A evolução da taxa de abandono escolar no Ensino Médio - Brasil 2001-2012.

Fonte: Inep (2013).

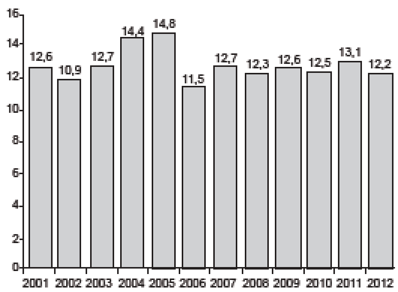


Gráfico 3 – A evolução da taxa de reprovação no Ensino Médio - Brasil 2001-2012.

Fonte: Inep (2013).

Com base nos dados apresentados, avalie as afirmações a seguir.

I. A evolução da taxa de abandono escolar no ensino médio brasileiro mostra a tendência de queda, sinalizando que não há mais necessidade de políticas públicas para corrigir esse problema.

II. Ao contrário das demais taxas, a taxa de reprovação no ensino médio brasileiro sinaliza uma tendência de estabilidade, aproximand,o-se de 12%.

III. A taxa de defasagem idade-série apresentou grande variação de ano para ano no período de 2001 a 2012.

IV. Um diagnóstico feito a partir dos três gráficos aponta para uma situação favorável em termos de aprendizado dos estudantes brasileiros que concluem o ensino médio.

É correto apenas o que se afirma em

A. I.

B. II.

C. I e III.

D. II e IV

E. III e IV

Gabarito: Alternativa B

Autoria: Lori Vialli

COMENTÁRIO:

I- A evolução da taxa de abandono escolar no ensino médio brasileiro mostra a tendência de queda, sinalizando que não há mais necessidade de políticas públicas para corrigir esse problema.

Existe, de fato, de acordo com o gráfico apresentado, uma tendência de queda da taxa de abandono escolar a partir de 2006 apenas. Anteriormente a taxa estava variando em torno de 10% e em 2006 passou para 15,3%, mostrando a partir daí uma queda anual, chegando a 9,1% em 2012. Assim a primeira parte da afirmação é verdadeira, em parte. Já a segunda parte não pode ser inferida do gráfico, pois é justamente uma questão de política e não de estatística. Assim a afirmação deve ser considerada FALSA.

II- Ao contrário das demais taxas, a taxa de reprovação no ensino médio brasileiro sinaliza uma tendência de estabilidade, aproximand,o-se de 12%.

Essa afirmação é aparentemente verdadeira, pois enquanto as taxas dos gráficos anteriores mostram tendência de queda (a primeira em todo o período) e a segunda (em parte do período) o terceiro gráfico apresenta variações aparentemente em torno dos 12%, pelo menos ao final do período. Nesse caso, a afirmação pode ser considerada VERDADEIRA.

III- A taxa de defasagem idade-série apresentou grande variação de ano para ano no período de 2001 a 2012.

Essa afirmação poderia ser considerada (subjetivamente) verdadeira se fosse mencionado todo o período, mas como menciona de ano para ano ela é falsa, pois em alguns anos a variação foi, de fato, muito pequena (de novo, subjetivamente, pois o que é grande ou pequeno é relativo). Assim essa afirmação pode ser considerada FALSA.

IV- Um diagnóstico feito a partir dos três gráficos aponta para uma situação favorável em termos de aprendizado dos estudantes brasileiros que concluem o ensino médio.

Novamente aqui a afirmação extrapola os três gráficos apresentados, pois nenhum deles avaliou o aprendizado. A única ilação possível é que como a reprovação não vem aumentando então existe um aprendizado, mas isso é ir muito além do gráfico. Assim essa afirmação deve ser considerada FALSA.

Com base na análise acima a resposta correta da questão seria a letra B.

QUESTÃO 26

No século XII surgiu, na Índia, um matemático conhecido historicamente como Bháskara II. Esse matemático fez grandes avanços para a resolução da equação quadrática. Bháskara dedicou-se a estudar Astronomia e Matemática, escreveu obras sobre aritmética e resolveu equações do tipo $ax^2+bx=c$, utilizando o método de “completar quadrados”. Atribui-se a ele o seguinte problema: “A oitava parte de um bando de macacos elevada ao quadrado, brinca em um bosque. Além disso, 12 macacos podem ser vistos sobre uma colina. Qual o total de macacos?”

PITOMBEIRA, João Bosco. *Revisitando uma velha conhecida*. Departamento de Matemática. PUC-RIO, p. 1 a 41, p. 24. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br>. Acesso em: 21 jul. 2014 (adaptado).

Com base nessas informações, assinale a opção que apresenta um valor possível para o total de macacos no problema de Bháskara II.

A. 12 macacos.

B. 18 macacos.

C. 20 macacos.

D. 76 macacos.

E. 96 macacos.

Gabarito: alternativa A

Autoria dos comentários: Tânia C. B. Cabral

COMENTÁRIO:

A questão é apresentada na forma de problema, no contexto da história da matemática, relacionada ao nome de Bháskara II, supostamente por estudos sobre problemas que se expressam por equações de segundo grau. Conforme Roque (2012), a contribuição em sânscritos dos hindus, cuja origem é reportada ao primeiro milênio antes da Era Comum, para o conhecimento matemático, é tida importante tendo sido estudada e, atualmente, bastante comentada em livros de história da matemática. A retórica era o meio para apresentar problemas e métodos; eram enunciados na forma escrita. Um exemplo é o método conhecido por *completamento dos quadrados* que é apresentado pela autora como segue.

I. De uma quantidade retiramos ou adicionamos a sua raiz multiplicada por um coeficiente e a soma ou a diferença é igual a um número dado.

II. Seja uma igualdade contendo a quantidade desconhecida, seu quadrado etc. Se temos os quadrados da quantidade desconhecida etc., em um dos membros multiplicamos os dois membros por um fator conveniente e somamos o que é necessário para que o membro das quantidades desconhecidas tenha uma raiz, igualando, em seguida, essa raiz à do membro das quantidades conhecidas, obtemos o valor da quantidade desconhecida.

III. É por unidades iguais a quatro vezes o número de quadrados que é preciso multiplicar os dois membros; e é a quantidade igual ao quadrado do número primitivo de quantidades desconhecidas simples que é preciso adicionar. (ROQUE, 2012).

Na nossa notação atual, para resolver o problema é preciso escrever a expressão matemática que o representa, entendido que o número total de macacos a ser encontrado, quantidade desconhecida, é o "xis da questão", portanto designado pela letra . Reconhece-se a afirmação "A oitava parte de um bando de macacos elevada ao quadrado", o quadrado da oitava parte da quantidade desconhecida, como $\left(\frac{1}{8}x\right)^2$. Seguindo a leitura, a esse quadrado adiciona-se 12, número de macacos avistados e contados. Assim, a equação que descreve a situação é $\left(\frac{1}{8}x\right)^2$+12= x e, para resolvê-la, lança-se mão do *completamento do quadrado*. Para isso, reorganiza-se a expressão, escrevendo $x^2+12(64)=64x$. Seguindo o método, o fator conveniente pelo qual deve-se multiplicar os dois membros é 4, obtendo-se $4x^2+48(64)=4(64)x$ e quanto deve-se adicionar para que haja uma raiz é $(64)^2$. Assim, tem-se que

$$4x^2+48(64)+(64)(64)=4(64)x+(64)(64)$$
$$4x^2-4(64)x+(64)(64)=-(48)(64)+(64)(64)$$
$$(2x)^2-2(2x)(64)+(64)^2=(2x-64)^2$$
$$(2x-64)^2=64(-48+64)=(64)(16)$$
$$\begin{cases} 2x-64=\sqrt{(64)(16)}=32 \\ 2x-64=-\sqrt{(64)(16)}=-32 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 2x=32+64=96 \\ 2x=-32+64=32 \end{cases} \Rightarrow x=48, x=16$$

Portanto, a solução esperada, conforme as opções dadas, é x=16.

O trabalho de resolver a equação da forma $ax^2+bx+c=0$, em termos da Matemática atual (M20), recai na aplicação simples da fórmula que alunos detêm $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ cuja solução segue:

$$\left(\frac{1}{8}x\right)^2+12=x \Rightarrow x^2+12(64)=64x$$
$$x=\frac{-(-64)\pm\sqrt{(-64)^2-4(1)(64)}}{(2)(1)}=\frac{64\pm\sqrt{(16)(64)}}{2}=\frac{64\pm(8)(4)}{2}$$
$$\therefore x=48, x=16$$

Palavras finais. Pode-se considerar esta questão como sendo de nível de dificuldade fácil, ao alcance mesmo de alunos não pertencentes a um curso de graduação em Licenciatura Matemática, exigindo-se leitura atenta do enunciado para traduzi-lo na forma de uma equação e habilidade com as operações algébricas.

As referências mostram que o modo atual de resolver uma equação, como a que foi proposta no exame, para descrever o problema apresentado, é o resultado de alguns anos de evolução do pensamento matemático, considerado que o conhecimento acumulado não é linear, embora assim seja tratado nas salas de aula. Essa reflexão, juntamente com outras tantas análises sobre modos de resolver um problema, deve ser objeto de disciplinas como Evolução do Pensamento Matemático em Cursos de Licenciatura Matemática.

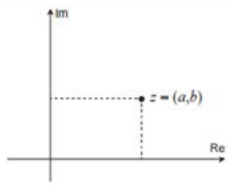
REFERÊNCIA

ROQUE, T. A. *História da Matemática*. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012. E-book.

QUESTÃO 27

Os números complexos possuem diferentes representações, tais como: algébrica, geométrica e trigonométrica, conforme ilustra o quadro a seguir.

Considerando as diferentes representações dos números complexos e o seu ensino, avalie as afirmações a seguir.

FORMA ALGÉBRICA	FORMA GEOMÉTRICA	FORMA TRIGONOMÉTRICA
$z = a + bi$		$z = \rho\,(\cos\theta + i\,sen\,\theta)$ $\rho \geq 0$

I. A forma algébrica dos números complexos é a única representação presente nos livros didáticos de ensino médio.

II. Historicamente, os números complexos surgiram da tentativa de resolução de equações polinomiais do 2º grau com discriminante negativo.

III. O ensino da forma trigonométrica dos números complexos facilita a compreensão do significado geométrico da operação de multiplicação de complexos: rotação de pontos (ou vetores) no plano.

IV. A cada número real corresponde um número complexo $z=\rho(\cos\Theta + i sen\Theta)$, com $\Theta=0$.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. III, apenas.

C. I, II e IV apenas.

D. II, III e IV apenas.

E. I, II, III e IV.

Gabarito: alternativa B

Autoria: Marilene Jacintho Müller e Neda da Silva Gonçalves

COMENTÁRIO:

Para resolver a questão, é necessário um conhecimento geral das representações dos números complexos, alguns de seus usos e dos conteúdos trabalhados sobre o assunto no Ensino Médio.

Para escolher a alternativa correta, deve-se analisar as afirmações apresentadas.

Afirmação I

Falsa, pois os livros de Ensino Médio apresentam as três representações.

Afirmação II

A afirmação é falsa. Não é possível pensar que os conjuntos numéricos com os quais se está familiarizado foram surgindo na sequência em que são estudados: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais, Reais e Complexos e ainda conforme fossem aparecendo problemas e com eles a necessidade para a resolução através de equações. O surgimento foi muito mais complexo e tortuoso. Muito tempo foi necessário para sua compreensão e aceitação pelos estudiosos da época. A disputa entre Cardano e Tartáglia impulsionou os estudos das resoluções de equações de terceiro grau e 1545 foi um marco na história dos números complexos. Vale a pena ler: <http://www.mat.ufrgs.br/~portosil/compla.html> e <http://www.ime.usp.br/~martha/caem/complexos.pdf>.

Afirmação III

Verdadeira. A forma trigonométrica auxiliando na multiplicação, oferece um grande auxílio nas potências (Fórmula de Moivre) e no conhecimento de raízes como consequência. A forma trigonométrica também é útil nas transformações no plano.

Afirmação IV

Falsa, se for considerado apenas $\Theta=0^{o}$, só existirão números com parte imaginária nula e parte real sempre positiva.

Assim, a resposta possível é a alternativa B

A questão pode ser considerada fácil, pois sua elaboração envolve conceitos trabalhados no Ensino Médio e, em geral, revistos e aprofundados nos cursos de Licenciatura em Matemática.

REFERÊNCIAS

DANTE, L. R. *Matemática*: contexto e aplicações. São Paulo: Ática, 2006.

CHURCHILL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações.* São Paulo: McGraw-Hill Ltda., 1975.

QUESTÃO 28

Assim como os sistemas de numeração, os números classificados como negativos, irracionais, racionais e complexos tiveram uma ordem de surgimento na linha do tempo. Esse conhecimento histórico é importante, pois a partir dele, é possível compreender os obstáculos didáticos apresentados nos processos de ensino-aprendizagem dos números.

A respeito do tema, assinale a alternativa que contém a ordem cronológica da origem dos números, na escrita atual, do conjunto, sendo a constante de Euler e o número imaginário.

A. 1/2, e, -3, √2, *i*

B. 1/2, -3, √2, e, *i*

C. 1/2, √2, -3, *i*, *e*

D. -3, 1/2, √2, *i*, *e*

E. -3,√2,1/2,e,*i*

Gabarito: alternativa C

Autoria: Tânia C. B. Cabral

COMENTÁRIO:

Não obstante a afirmação sobre a importância de se conhecer a ordem de produção na história, para se compreender os obstáculos didáticos, em verdade, o que determinará a visão sobre os ditos obstáculos gerados pelos encaminhamentos didáticos é a análise das respostas dos alunos às situações propostas para o desenvolvimento dos processos de aprendizagem. Por certo que é de extrema importância a compreensão do professor sobre a produção de conhecimento matemático, principalmente a tomada de consciência a respeito da não linearidade dessa produção e que possa entender que não se deve ficar restrito a uma ordem cronológica. É fundamental na formação do professor que seus estudos recaiam sobre os principais problemas que determinaram contradições, sobre os modos de pensar ao longo de períodos que impediram a criação de soluções, sobre situações, tanto as sociais quanto as relativas ao próprio saber, que impuseram novas significações para o campo em questão.

Iniciando os comentários sobre a questão, estudos sobre a formação do pensamento matemático, do ponto de vista histórico, mostram que, por exemplo, no papiro escrito por Ahmes, observa-se o modo de os egípcios lidarem com frações bastante diferente da concepção que temos hoje. Segundo Cajori (2007), as informações que constam naquele papiro indicam que o sentido atribuído à palavra fração era limitado ao que se conhece como frações unitárias, frações cujo numerador é constante igual a um. Entretanto, é preciso chamar atenção para o fato de que entre os historiadores não há consenso sobre essa interpretação. Consultado o texto de Roque (2012), por exemplo, sua leitura para as representações das frações da época egípcia, sustentada por informações cotejadas com outros historiadores, é que estas representavam os inversos dos números e que as frações não tinham numerador no sentido de representar o número de partes tomado de um inteiro. Mais longe ainda está da concepção de razões e proporções entre inteiros, grandezas de mesmo tipo comensuráveis, que segundo a autora é creditada aos matemáticos gregos filiados à escola fundada por Pitágoras. Conforme Roque (2012), seguindo outros historiadores, essa ideia de razões e proporções estaria muito próxima de uma forma de definição como a apresentada nos Elementos de Euclides.

Não obstante as leituras pouco convergentes aqui aludidas sobre pensamentos de uma época, esse papiro, também conhecido por papiro de Rhind, por pertencer à coleção de mesmo nome do Museu Britânico, é compreendido como sendo uma expressão do pensamento egípcio sobre problemas de aritmética e geometria; sua datação remete a um período anterior ao marco de 1700 antes da era cristã.

Quanto ao segundo número que aparece na lista, em termos da cronologia reconhecida, conforme apresentado em Cajori, está relacionado ao fato de “A primeira razão incomensurável conhecida, parece ter sido a do lado do quadrado para a sua diagonal, ou seja $\sqrt{2}$” (CAJORI, p. 94, 2007).

A ideia de um número irracional, conforme os historiadores, presume-se ter sido tratada pela Escola Pitagórica, cuja datação remete ao período incerto de 500 anos antes da era cristã, que manteve sob segredo por não poder “ser dito” uma vez que enfrentaram o perturbador fato de haver segmentos que diferiam entre si em quantidade e em qualidade; esta última, real, mas invisível (CAJORI, p. 94, 2007). Em Roque é mencionado que isso em verdade está na ordem das lendas sobre a descoberta dos irracionais; refere-se no texto à quebra do sigilo por Hípaso de Metaponto sobre a existência de números diferentes daqueles presentes na crença dos pitagóricos, pois estes acreditavam que a geometria, descritiva do mundo, só poderia ser representada por números racionais. Ainda conforme Roque, a ideia que “Von Fritz conjectura que a incomensurabilidade tenha sido descoberta durante o estudo do problema das diagonais do pentágono regular [...]” (ROQUE, 2012) ajuda a sustentar a lenda. Aqui também há visões diferentes entre autores como Cajori e Roque sobre o papel da aritmética, da geometria e da própria filosofia na discussão dos incomensuráveis: “O problema da incomensurabilidade parece ter surgido no seio da própria matemática, mais precisamente da geometria sem a relevância filosófica que lhe é atribuída” (ROQUE, 2012).

Uma vez que durante tempos, no período de apogeu da Grécia, a ideia dos números como representantes do mundo foi hegemônica, conclui-se que não poderia haver lugar para ideia de um número como o terceiro que aparece na lista, –3, um negativo. Sua origem, pode-se dizer, encontra-se em período não bem definido, por volta de 500 depois da era cristã, mas indicando que “a China foi a primeira a (1) criar um sistema de numeração posicional decimal, (2) reconhecer os números negativos [...]” (EVES, 246, 2004).

No texto de Cajori, a ideia de lidar com números positivos e negativos pelos chineses está associada à manipulação de varetas de cálculo na cor vermelha designando números positivos e na cor preta para representar números negativos. Expressa o autor que foram os hindus que, por volta de 600 depois da era cristã, reconheceram “a existência de quantidades absolutamente negativas” (CAJORI, p. 147, 2007) tendo associadas a ideia de possessão aos positivos e a ideia de débito aos negativos que, por certo, estariam ligadas a problemas comerciais, uma das facetas com que se trabalha no ensino de matemática para dar sustentação à construção do significado operacional na álgebra em nossos dias.

Finalmente, dando-se um grande salto no tempo, chegando ao período renascentista, poder-se-ia colocar em dúvida o que vem antes quando se tem de lidar com a constante de Euler, *e*, relacionada com logaritmos, e o imaginário *i*, complexo cuja parte real é nula. O interessante é mencionar que ambos estão também ligados ao nome de Euler, não obstante o fato de Girolamo Cardano ter enfrentado o dilema da aceitação de uma raiz negativa como solução para equações que estudava. Conforme Cajori, é no Ars Magna (A Grande Arte ou As Regras da Álgebra), em 1945, quando ele escreve também sobre a solução de Nicolo de Brescia (Tartaglia) para uma cúbica, que Cardano liga seu nome ao cálculo de raiz quadrada de números negativos, apesar de, conforme Cajori, “não reconhecer as raízes imaginárias” (CAJORI, p. 197, 2007). Na sequência, Euler, em 1734, usa a letra *e* para significar a base natural dos logaritmos e em 1777 usa a letra para denotar $\sqrt{-1}$.

Palavras finais. Relativamente à proposição da questão em uma prova, aqui analisada, não seria do gosto da comentarista apresentá-la como questão constituinte de uma prova, uma vez que, como observado, necessita-se apenas de boa memória para situar os elementos da lista ao longo da história. Considera-se, portanto, esta questão como sendo de nível de dificuldade fácil, requerendo apenas memorização relativa ao surgimento dos números dispostos na lista dada.

Com relação aos comentários sobre o desenvolvimento do raciocínio que possibilita uma solução para a questão, naturalmente, grandes períodos de história foram deixados de lado, vários nomes e, principalmente, problemas deixaram de ser mencionados. Mais ainda, imperdoável seria em outras condições, as situações e organizações sociais das épocas sequer foram mencionadas, sabendo que foram determinantes para a evolução do pensamento matemático. Mas os comentários pretendem apenas aguçar a curiosidade do leitor, colocar mais interrogações do que o próprio problema comentado apresenta.

Os números, ou melhor, os conjuntos numéricos apresentados logicamente na Matemática do século XX (M20) é o resultado de tentativas de limpar o campo conhecido como Matemática, de não deixar rastros de dúvidas, de esconder os “defeitos” no desenvolvimento de algumas argumentações e os “tropeços” de quem as formulou; é preciso ter cuidado, e com a história é fundamental entender que não houve defeitos ou faltas nas formulações realizadas a seu tempo. O trabalho de limpar o desenvolvimento tem por objetivo paralisar os deslizamentos naturais resultantes das retóricas produzidas no seio do que se conhece como filosofia; esta, por certo, teve papel fundamental para a constituição de vários campos de saberes, entre eles, a Matemática.

Os números, compreendido esse processo de ir e vir, podem finalmente ser entendidos como síntese de múltiplas determinações. Portanto, ao invés de apagar esses vestígios para apresentar a história da matemática como universal, higienizada, sem erros, sem contradições e linear, é preciso que seja aceito o fato de esse processo ser o próprio resultado, afinal, como dito por Slavoj Zizek, filósofo hegeliano e psicanalista que segue a diretriz Lacaniana, o caminho para a verdade já é a própria verdade; isso é dialética, base para construção de saberes.

REFERÊNCIAS

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP, 2004.

CAJORI, F. *Uma história da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

ROQUE, T. A. *História da Matemática*. Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012. (E-book).

QUESTÃO 29

Os números perfeitos foram introduzidos na Grécia, antes de Cristo. Um número n é dito perfeito se ele for igual à soma dos seus divisores positivos e próprios, ou seja, dos divisores positivos menores que n. Assim, se 2^k-1 é primo, k>1,então o inteiro positivo $n=2^{k-1}(2^k-1)$é um número perfeito.

Com base nessas informações, avalie as informações a seguir.

I. O número $2^2 x 4^2 x 127$ é perfeito e tem 17 divisores próprios.

II. O número 28 é um número perfeito.

III. Ao se adicionar as potências 2^0, 2^1, 2^2, 2^3,... até que a soma seja igual ao décimo primeiro número primo e, em seguida, multiplicar a soma obtida pelo último termo, encontra-se um número perfeito.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. II, apenas.

C. I e III, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa D

Autoria: Neda da Silva Gonçalves

COMENTÁRIO:

Para resolver a questão, é necessário um conhecimento básico sobre potências, números primos e divisores de números naturais. É uma questão relativamente fácil para o aluno que trabalhou com uma introdução à Teoria dos Números que forneceu teoria algébrica sobre os números Naturais ou Inteiros, estudados no Ensino Básico.

Com base nas informações I, II e III, tem-se o seguinte:

- 127 é primo, basta verificar, e $127 = 2^7 – 1$ com k =7;
- a expressão $2^2 \times 4^2 \times 127 = 2^2 \times 2^4 \times 127 = 2^6 \times 127$. Como k =7, $2^{k-1} \times (2^k –1)$ e portanto é um número perfeito, mas o sendo $2^6 \times 127^1$, o seu número de divisores é (6+1).(1+1)= 14 e não 17;
- 28 é um número perfeito, basta usarmos a definição: 1+2+4+7+14 =28 ou ainda, se k = 3 então $2^2 \times (2^3 –1)$ é número perfeito já que $2^3 – 1=7$, primo;

- como o décimo número primo é 31 (basta contar), devemos adicionar $(2^0+2^1+2^2+2^3+2^4)$ e o multiplicando por 16 temos um número perfeito. Podemos aplicar a proposição que será notada:16 x 31= 2^4 x 31 é um número perfeito já que é da forma $2^{k-1} \times (2^k - 1) = 2^4 \times (2^5 - 1)$ e $2^5 - 1$ é primo.

Dessa forma, a alternativa D aponta as duas afirmativas corretas.

REFERÊNCIAS

MILIES, Francisco César Polcino; COELHO, Sonia Pitta. *Números*: uma introdução à matemática. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

SANTOS, José Plínio dos. *Introdução à Teoria dos Números*. Rio de Janeiro: IMPA, 2003.

QUESTÃO 30

As imagens de uma tela plana de televisão digital são representadas por pontos, chamados pixels. Os movimentos das imagens correspondem às mudanças desses pontos representados em um sistema cartesiano ortogonal, que, em computação gráfica, são realizadas por operações de matrizes. Uma rotação de α graus de um ponto (x, y), no sentido anti-horário e em torno da origem desse sistema, é feita pela multiplicação da matriz M_{2x2} dada por

$\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\operatorname{sen}(\alpha) \\ \operatorname{sen}(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$ pela matriz M_{2x1}, sendo x a primeira linha e y a segunda linha, gerando uma matriz coluna que dá a nova posição do ponto (x, y) após a rotação.

Nessa situação, qual a nova posição do ponto (3, –1) após uma rotação de 150° no sentido anti-horário e em torno da origem do sistema cartesiano ortogonal?

A. $\left(\frac{1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3+\sqrt{3}}{2}\right)$

B. $\left(\frac{-3+\sqrt{3}}{2}, \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$

D. $\left(\frac{-1-3\sqrt{3}}{2}, \frac{-3+\sqrt{3}}{2}\right)$

E. $\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+3\sqrt{3}}{2}\right)$

Gabarito: alternativa A

Autoria: Liara Aparecida dos Santos Leal

COMENTÁRIO:

Pelo exposto no enunciado da questão, basta efetuar a multiplicação entre a matriz

$$M_{2x2} = \begin{bmatrix} \cos(150) & -\operatorname{sen}(150) \\ \operatorname{sen}(150) & \cos(150) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \text{ e a matriz } M_{2x1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix},$$

obtendo a matriz (2x1): $\begin{bmatrix} \frac{1-3\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$. .

Portanto a resposta correta é o item A.

QUESTÃO 4

Atualmente, a maioria dos editores de texto oferece o recurso de correção ortográfica. Esse recurso consiste em destacar, entre as palavras digitadas, aquelas com possíveis erros de grafia. Por exemplo, quando se digita a palavra "*caza*", o recurso de correção destaca essa palavra, pois a palavra "*caza*" não existe na língua portuguesa.

A sugestão de quais palavras podem substituir a palavra incorreta é feita com uma medida da distância entre a palavra incorreta e as palavras que constam no dicionário do editor de texto. Existem diversas maneiras de medir a distância entre duas palavras. Uma delas é a denominada Distância de Hamming, na qual a medida da distância entre duas palavras x e y, com uma mesma quantidade de letras, é feita da seguinte forma: $d(x,y)$= número de letras que são diferentes em x e y, em suas respectivas posições. Mais formalmente, se $x=x_1x_2x_3 \ldots x_n$ e $y= y_1y_2y_3 \ldots y_n$ são palavras em que x_i e y_i são letras do alfabeto, para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$, então $d(x,y) = \#(\{i{:}xi \neq yi, com\ i = 1,2,3, \ldots,n\})$, em que $\#(A)$ representa o número de elementos do conjunto A. Por exemplo, d(caza, casa) = #({3})=1, já que elas diferem apenas na terceira letra.

A partir dessas informações, faça o que se pede nos itens a seguir.

A. Mostre que a Distância de Hamming é uma métrica no conjunto das palavras com letras. (valor: 5,0 pontos)

B. Mostre que o conjunto das palavras com letras, munido da Distância de Hamming, é um espaço métrico discreto. (valor: 5,0 pontos)

Questão discursiva (anulada)

Autoria: Maria Beatriz Menezes Castilhos e Gabriel Mattos Langeloh

Observação:

Essa questão foi anulada, pois o enunciado estava mal formulado. Existem duas maneiras de corrigi-lo. A primeira é manter as definições dadas no enunciado e alterar os itens a) e b) para:

A. Mostre que a Distância de Hamming é uma métrica no conjunto das palavras com n letras. (valor: 5,0 pontos)

B. Mostre que o conjunto das palavras com n letras, munido da Distância de Hamming, é um espaço métrico discreto. (valor: 5,0 pontos)

Outra possibilidade é alterar a definição de Distância de Hamming na questão, de modo a permitir a comparação de palavras de tamanhos diferentes. Abaixo, duas soluções serão desenvolvidas, cada uma considerando cada uma dessas correções da questão.

COMENTÁRIO:

A primeira solução dada corresponde à restrição da Distância de Hamming a palavras de *n* letras.

Para resolver o item A, é necessário o conhecimento do conceito de métrica.

Segundo LIMA (1977), uma métrica em um conjunto *M* é uma função que associa a cada par ordenado de elementos um número real chamado a *distância* de *x* a *y*, de modo que sejam satisfeitas as seguintes condições, para quaisquer x, y, z $\in$ M:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ se e somente se $x = y$
3. $d(x,y) = d(x,y)$
4. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Assim, deve-se mostrar que a função *d*, que associa a cada par de palavras com *n* letras e *y*, sendo $x=x_1x_2x_3 \ldots x_n$ e $y = y_1y_2y_3 \ldots y_n$, o número correspondente a $\#(\{i{:}xi \neq yi, com\ i = 1,2,3, \ldots,n\})$, satisfaz as quatro condições citadas.

Verifica-se facilmente a propriedade 2, pois se as palavras são as mesmas, não há letras diferentes nas respectivas posições. Por outro lado, se duas palavras com um mesmo número de letras são diferentes, pelo menos diferem em uma letra, ou seja, existe pelo menos uma posição *i* ocupada por uma letra na palavra *x* e por outra letra diferente na palavra *y*. Assim, sendo $x=x_1x_2x_3 \ldots x_n$ e $y = y_1y_2y_3 \ldots y_n$, o número correspondente a $\#(\{i{:}x_i \neq y_i, com\ i = 1,2,3, \ldots,n\})$ é 1 (um) ou mais. Portanto também é válida a propriedade 1. Ainda, como a relação "≠" é reflexiva (se $x\neq y$, então $y\neq x$), vale a condição 3. Finalmente, dadas as palavras $x=x_1x_2x_3 \ldots x_n$, $y = y_1y_2y_3 \ldots y_n$, e $z=z_1z_2z_3 \ldots z_n$, sendo $d(x,y)$ =p e $d(y,z)$=q, existem *n-p* letras coincidentes nas palavras *x* e *y* e *n-q* letras coincidentes nas palavras y e z. Assim, no mínimo *n-p-q* letras coincidem, em suas respectivas posições, nas palavras *x* e *z*. Logo, no máximo *p+q* letras são diferentes, isto é, $p+q= d(x,y)+ d(y,z) \geq d(x,z)$.

Para resolver o item b), é necessário o conhecimento do conceito de espaço métrico. Segundo LIMA (1993), um *espaço métrico* é um par (*M*,*d*), em que *M* é um conjunto e *d* é uma métrica em *M*. Como já se mostrou que a distância *d* é uma métrica no conjunto das palavras com *n* letras *M*, então (*M*,*d*) é um espaço métrico. Por fim, cabe mostrar que (*M*,*d*) é um espaço métrico discreto. Para isso, usam-se as definições a seguir.

Dados $x \in M$ e $r > 0$ um número real, define-se *bola aberta* de centro x e raio r como o conjunto $B(x,r)=\{y \in M \mid d(x,y) < r\}$ (HÖNIG, 1976). Diz-se que um ponto x é um *ponto isolado* de *M* quando existe $r > 0$ tal que $B(x,r) \cap M=\{x\}$. Ainda, um espaço métrico chama-se *discreto* quando todo ponto de for isolado (LIMA, 1977).

Assim, para mostrar que (*M*,*d*) é um espaço métrico discreto, basta mostrar que todo ponto de *M* é isolado. Observe-se que, dados $x=x_1 \ldots x_n$, e $y=y_1 \ldots y_n$, os valores possíveis para $d(x,y)$ são os do conjunto $\{0,1,2,\ldots,n\}$. Assim, dado $0<r<1$, a *bola aberta* com centro em x e raio r contém somente o ponto x, ou seja, $B(x,r) \cap M=\{x\}$, qualquer que seja x. Logo, todo ponto de M é isolado, como queríamos demonstrar.

Segue agora a segunda solução, que modifica a definição de Distância de Hamming e mantém questões.

Primeiramente, observar que, na questão, a Distância de Hamming só está definida para palavras com o mesmo número de letras. Podemos contornar essa dificuldade definindo a distância de Hamming de $x=x_1x_2 \ldots x_n, y=y_1y_2 \ldots y_m$, quando $n < m$, como

$$d(x,y) = d(x,y_1 \ldots y_n)+m-n$$

e de maneira análoga para $n > m$. Assim, podemos falar em $d(x,y)$ para quaisquer duas palavras *x,y* no conjunto das palavras, isto é, *d* é uma função.

Para provar que *d* é uma métrica, precisamos mostrar que, para quaisquer x, y, z $\in$ M:

1. $d(x,y) \geq 0$
2. $d(x,y) = 0$ se e somente se $x=y$
3. $d(x,y) = d(y,x)$
4. $d(x,y) + d(x,y) \geq d(x,z)$

Como $d(x,y)$ é a cardinalidade de um conjunto, quando *x* e *y* possuem o mesmo número de letras, temos $d(x,y) \geq 0$. Se *x* e *y* possuem uma quantidade diferente de letras, $d(x,y)$ também é não negativa, pois é a soma de duas quantidades não negativas. Isso prova a propriedade 1.

Para mostrar a validade da propriedade 2, note que se $x = y$, temos $d(x,y)=\#\{i|x_i \neq x_i$ para $i=1,2,...,n\}=0$. Reciprocamente, se $d(x,y)=0$ e $x=x_1...x_n$, $y=y_1...y_m$ com n<m, temos $d(x,y) \geq m-n>0$ contradizendo nossa hipótese de que $d(x,y)=0$, e o mesmo ocorre se n>m. Assim, n=m e, pela definição de distância de Hamming, temos

$$d(x,y) = \#\{i \mid x_i \neq y_i \; para \; i = 1,2,\dots,n\} = 0$$

isto é, $x_i=y_i$ para todo *i* de 1a *n*, logo x=y.

Sejam $x=x_1...x_n$ e $y=y_1...y_m$ e suponhamos, sem perda de generalidade, que $n \leq m$. Então

$$d(x,y) = d(x,y_1\dots y_n) + m - n = \#\{i \mid x_i \neq y_i \; para \; i = 1,2,\dots,n\} + m - n$$
$$= \#\{i \mid y_i \neq x_i \; para \; i = 1,2,\dots,n\} + m - n = d(y_1\dots y_n,x) + m - n = d(y,x)$$

o que prova a propriedade 3.

Finalmente, para provar a propriedade 4, observe que se $x=x_1...x_n$, $y=y_1...y_m$ e $z=z_1...z_p$ e x_1 é diferente de z_i para algum valor de *i*, então y_i é diferente de x_i ou de z_i, senão teríamos $x_i=z_i$, isto é, a propriedade é válida no caso de palavras de tamanhos todos iguais. Se $n \leq m$ e $m \leq p$, então

$$d(x,y) + d(y,z) = d(x,y_1\dots y_n) + m - n + d(y,z_1\dots z_m) + p - m$$
$$= d(x,y_1\dots y_n) + d(y,z_1\dots z_m) + p - n$$
$$\geq d(x,y_1\dots y_n) + d(y_1\dots y_n,z_1\dots z_n) + p - n \geq d(x,z_1\dots z_n) + p - n = d(x,z)$$

Se $n \leq m$ e $m \geq p$, então, podemos supor, sem perda de generalidade, $n \leq p$. Observe que $2m-n-p \geq p-n$, pois $n+p \leq 2p \leq 2m$, donde $2m-(n+p) \geq 2p-(n+p)$. Daí,

$$d(x,y) + d(y,z) = d(x,y_1\dots y_n) + m - n + d(y_1\dots y_p,z) + m - p$$
$$= d(x,y_1\dots y_n) + d(y_1\dots y_p,z) + 2m - n - p$$
$$\geq d(x,y_1\dots y_n) + d(y_1\dots y_n,z_1\dots z_n) + p - n$$
$$\geq d(x,z_1\dots z_n) + p - n = d(x,z)$$

Os outros casos seguem da comutatividade da adição e da distância. Assim, o conjunto de todas as palavras com a Distância de Hamming forma um espaço métrico.

A resolução do item b) continua a mesma da solução anterior.

O nível de dificuldade desta questão pode ser considerado difícil, pois envolve diferentes definições, dentre elas, de métrica e de espaço métrico, além da contextualização. A resolução da questão requer um nível mais aprofundado de compreensão dos conceitos.

REFERÊNCIAS

HÖNIG, Chaim Samuel. *Aplicações da Topologia à Análise real*. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

LIMA, Elon Lages. *Espaços Métricos*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA,1993.

NETO, Ernesto Rosa. *Estruturas Topológicas*. São Paulo: PAED, 1981.

QUESTÃO 5

Uma equação diofantina linear nas incógnitas *x* e *y* é uma equação da forma *ax*+*by*=*c*, em que *a*, *b* e *c* são inteiros, e as únicas soluções (x_0, y_0) que interessam são aquelas em que $x_0, y_0 \in Z$.

Neste contexto, considere que os ingressos de um cinema custam R$ 9,00 para estudantes e R$ 15,00 para o público geral, e que, em certo dia, durante determinado período, a arrecadação nas bilheterias desse cinema foi de R$ 246,00.

A partir das informações acima, faça o que se pede nos itens a seguir.

A. Obtenha uma equação diofantina linear que modele a situação acima, indicando o significado das incógnitas. (valor: 3.0 pontos)

B. Quantas e quais são as soluções do problema descrito no item (a) (valor: 7.0 pontos)

Autoria: Marilene Jacintho Müller e Neda da Silva Gonçalves

COMENTÁRIO:

Para resolver essa questão, são necessários conhecimentos de resolução de equações com duas incógnitas com coeficientes e resultados inteiros, assim como de propriedades que garantam existir solução.

A. Observa-se que ao considerar "*x*" e "*y*" simbolizando, respectivamente, o número de estudantes ou não estudantes que adquiriram ingressos, a equação diofantina poderá ser escrita como $9x + 15y = 246$.

B. Sabe-se que para a equação ter solução o mdc (9,15) deverá ser divisor de 246. Isso acontece uma vez que o mdc (9, 15) = 3 que divide 246. Como o mesmo ocorre para equações equivalentes, será utilizada a igualdade $3x + 5y = 82$.

Uma forma de resolver essa equação consiste em isolar uma das variáveis e analisar a expressão obtida com o fim de encontrar soluções.

Isolando o *y*, tem-se: $y = \frac{82 - 3x}{5}$. Como *x* e *y* devem ser inteiros e positivos, pode-se pensar que, para obter-se *y* inteiro, 82-3*x* deverá ser múltiplo de 5. Deve-se ter, então, 82-3*x* terminado em zero ou 5. Dessa forma, a solução pode ser obtida intuitivamente com x=4, x=9, x=14, x=19, x=24.

Resolvendo de forma a generalizar a expressão das variáveis:

$y = \dfrac{82-2+2-3x-2x+2x}{5} = \left(\dfrac{80}{5} - \dfrac{5x}{5}\right) + \dfrac{2+2x}{5}$. Como y é inteiro e a expressão dentro dos parênteses é um inteiro múltiplo de 5, faz-se $\dfrac{2+2x}{5} = t$ que também deverá ser inteiro e múltiplo de 5, assim, $x = \dfrac{5t-2}{2} = \dfrac{5t}{2} - 1$.

Como o "*x*" já está em função de "*t* ,"o "*y*" será colocado como

$y = \dfrac{82-3(\frac{5t-2}{2})}{5} = \dfrac{164-15t+6}{10} = \dfrac{170-15t}{10} = 17 - \frac{3t}{2}$. As respostas, portanto, terão a forma $x = \dfrac{5t}{2} - 1$ e $y = 17 - \dfrac{3t}{2}$ com t inteiro e múltiplo de 2.

Assim, $x = \dfrac{5t-2}{2} > 0 \Rightarrow 5t - 2 > 0 \Rightarrow t > \dfrac{2}{5}$

$y = 17 - \dfrac{3t}{2} > 0 \Rightarrow \dfrac{3t}{2} < 17 \Rightarrow t < \dfrac{34}{3}$

Tem-se $\dfrac{2}{5} < t < \dfrac{34}{3} \Rightarrow 2 \le t \le 10.$

Tem-se então:

$t = 2 \Rightarrow x = 4 \; e \; y = 14$
$t = 4 \Rightarrow x = 9 \; e \; y = 11$
$t = 6 \Rightarrow x = 14 \; e \; y = 8$
$t = 8 \Rightarrow x = 19 \; e \; y = 5$
$t = 10 \Rightarrow x = 24 \; e \; y = 2$

$S = \{(4,14);(9,11);(14,8);(19,5),(24,2)\}$

Conforme solicitado, conclui-se que o problema apresenta cinco soluções, as quais estão explicitadas no conjunto S.

Entende-se que essa questão pode ser considerada de nível médio de dificuldade, pois envolve a aplicação de conceitos e propriedades relativos à teoria dos números, o que se constitui, para muitos estudantes, num ponto fraco na aprendizagem.

REFERÊNCIAS

DOMINGUES, Hygino H.; IEZZI, Gelson. *Álgebra moderna*. 4. ed. São Paulo: Atual, 2003.

SANTOS, Plinio O dos. *Introdução à Teoria dos Números*. IMPA, 1999. (Coleção Matemática Universitária.)

QUESTÃO 23

Avalie as seguintes afirmações a respeito das estruturas algébricas.

I. Se I é um ideal de Z, então I=$mZ=\{ma:a \in Z\}$, para algum $m \in Z$.

II. O conjunto das classes de equivalência módulo n, $Z_n = Z/nZ$, para n primo, munido das operações usuais de adição e multiplicação é um corpo.

III. O conjunto dos números complexos com parte real nula, munido da operação usual de adição, forma um grupo abeliano.

IV. O conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um anel não comutativo com unidade.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. II, apenas.

C. I, III e IV, apenas.

D. II, III e IV, apenas.

E. I, II, III e IV.

Gabarito: alternativa E

Autoria: Neda da Silva Gonçalves e Thaísa Jacintho Müller

COMENTÁRIO:

Para chegar-se à conclusão sobre a veracidade ou falsidade das proposições apresentadas, são necessários conhecimentos sobre classes de equivalência e estruturas como Anéis principais e Ideais, Anéis quocientes e ainda a estrutura de Grupos.

Analisando cada afirmação tem-se o seguinte:

Afirmação I: Se I é um ideal de Z, então $I=mZ=\{ma:a \in Z\}$, para algum $m \in Z$.

Sabe-se que Z é um domínio de Ideais principais, isto é, todo ideal de Z é um ideal principal e, portanto, da forma mZ como a descrita. Sendo assim, a afirmação é verdadeira, portanto eliminam-se as alternativas “B” e “D”.

Afirmativa II: O conjunto das classes de equivalência módulo $n, Z_n=Z/nZ$, para primo, munido das operações usuais de adição e multiplicação é um corpo.

Se “n” é primo, nZ é um ideal maximal de Z, logo o anel quociente indicado, é um corpo. (Gonçalves, p.52). Portanto, a afirmação é verdadeira e podem ser eliminadas também as alternativas “A” e “C”.

Afirmativa III: O conjunto dos números complexos com parte real nula, munido da operação usual de adição, forma um grupo abeliano.

Temos A = { x + i y | x=0 e y ∈ R}, o subconjunto de C referido no exercício. Com a operação de adição tem-se o elemento neutro 0+0i de C. Cada elemento 0+ i y tem seu inverso aditivo 0 – iy, pois (0+ i y) + (0 - i y) = 0 + 0i (elemento neutro). A comutatividade e a associatividade são herdadas de C por termos a adição como operação nesse conjunto. Logo, a afirmativa está correta.

Afirmativa IV: O conjunto das matrizes quadradas de ordem 2 com entradas reais, munido das operações usuais de adição e multiplicação, é um anel não comutativo com unidade.

Esse é um dos Anéis bem trabalhados nas disciplinas de Álgebra. É citado em toda bibliografia que aborda o assunto por ser um bom exemplo de anel não comutativo com unidade (GONÇALVES, p. 44-47).

Com essas observações sobre o que foi afirmado, as quatro afirmações estão corretas.

REFERÊNCIA

GONÇALVES, Adilson. *Introdução à* Álgebra*.* Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

QUESTÃO 24

Um pesquisador necessita da solução de uma equação diferencial ordinária para implementar seu código computacional. Resolvendo por meio de uma série de potências, ele encontra a seguinte solução:

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

O pesquisador necessita que a solução seja computada com uma precisão de 0,01 no intervalo -2<*x*<2. Para isso, ele escreve os primeiros 200 termos da série no código. No entanto, ao rodar o programa nesse intervalo, ele percebe um comportamento anômalo.

Considerando que o pesquisador não tenha cometido erro ao implementar a série, avalie as afirmações a seguir.

I. A série não pode representar uma solução no intervalo -2<x<2, pois diverge para |x|>1.

II. São necessários mais termos do que os que o pesquisador escreveu para atingir a precisão requerida no intervalo -1<x<1.

III. A precisão 0,01 não pode ser atingida por essa série de potências.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. III, apenas.

C. I e II, apenas.

D. I, e III , apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa A

Autoria: Eliete Biasotto Hauser

COMENTÁRIO:

Uma expressão da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n = b_0 + b_1(x-c) \quad + b_3(x-c)^3 + \cdots \qquad (1)$$

é uma série de potências com termo geral $b_n(x-c)^n$, centrada em x=c.

As somas parciais da série, à direita em (1), podem ser pensadas como polinômios que aproximam a série dada.

Na presente questão, a série de potências é centrada em zero

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \qquad (2)$$

Aproximamos $y(x) \cong y_k(x)$, com somas parciais dadas por

$$y_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n^2}, \qquad (3)$$

ilustradas na figura 1, para k=1,2,3,4, 5 e 200.

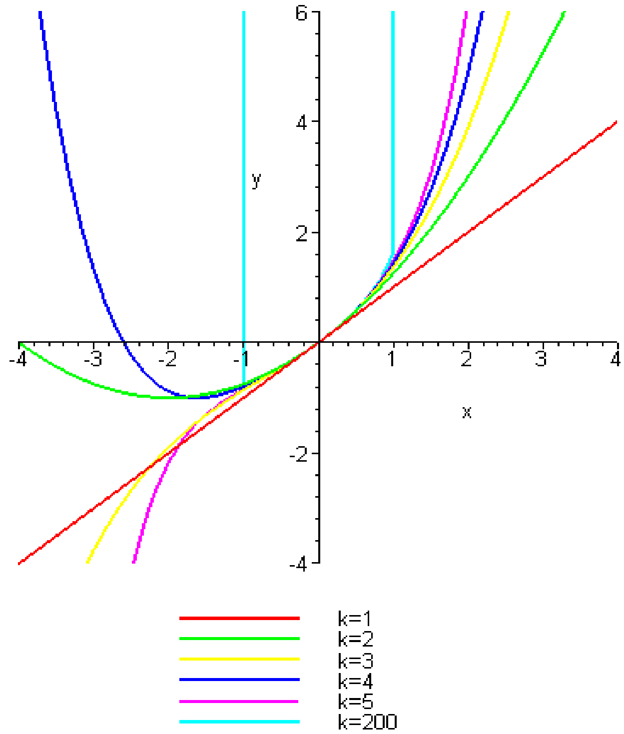


Figura 1 – Somas Parciais $y(x) \cong y_k(x) = \sum_{n=1}^{k} \frac{x^n}{n^2}$.

Percebemos que é possível pensar numa série de potências como uma função que depende da variável x. Dessa forma, é importante conhecer o seu domínio, isto é, o conjunto de valores de x para os quais a série converge. O teorema a seguir atesta que somente três possibilidades podem ocorrer.

Teorema de Abel: Para uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-c)^n$, existem apenas três possibilidades:

1. Existe um número real positivo "R" tal que a série converge para todo *x* tal que $|x-c|<R$ e diverge para todo *x* tal que $|x-c|>R$. A série pode ou não convergir nos extremos x=c-R e x=c+R.
2. A série converge apenas para x=c (R = 0).
3. A série converge para todos números reais. (R=∞).

O número real R é chamado de **raio de convergência,** o qual pode ser determinado aplicando o teste da razão(ou raiz) para uma série numérica.

Teste da razão: Seja $L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, então, a série de termos positivos $\sum_n a_n$

- **converge se L<1;**
- **diverge se L>1 ou se L=∞;**
- **O teste é inconclusivo se L=1.**

Para escolher a alternativa correta desta questão, é preciso verificar se as afirmações I, II e III são verdadeiras ou falsas.

A afirmação I é verdadeira.

Para analisar a convergência da série de potências dada, aplicamos o teste da razão, considerando $a_n = \frac{x^n}{n^2}$:

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}\times\frac{n^2}{x^n}\right| = |x| \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right| = |x| \ .$$

Portanto, a série dada diverge se |x|>1, e, é correto afirmar que série (2) não pode representar uma solução no intervalo -2<x<2.

As afirmações II e III são falsas.

Como contra exemplo, escolhendo $x = \frac{1}{2}$ em (2), obtemos a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^2}$, convergente, pois, pelo teste da razão

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{2^n n^2}{2^{n+1}(n+1)^2}\right| = \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{n^2}{n^2+2n+1}\right| = \frac{1}{2} < 1.$$

Construímos as primeiras somas parciais $S_k = \sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n n^2}$:

$$S_1 = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2^2} = 0.5 + 0.0625 = 0.5625$$

$$S_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2^2} + \frac{1}{2^3 3^2} \cong 0.5 + 0.0625 + 0.0138888 \cong 0.576388$$

$$S_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2 2^2} + \frac{1}{2^3 3^2} + \frac{1}{2^4 4^2} \cong 0.5 + 0.0625 + 0.0138888 + 0.00390625 \cong 0.580295$$

Considerando três termos da série, temos que

$$|S_3 - S_2| = \frac{1}{2^3 3^2} \cong 0.0138888 > 0{,}01\cdot$$

A precisão requerida é obtida com quatro termos da série pois,

$$|S_4 - S_3| = \frac{1}{2^4 4^2} = 0.00390625 < 0{,}01\cdot$$

Na figura abaixo ilustramos geometricamente a convergência das somas parciais

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n n^2},\ k = 1,2,\ldots,20.$$

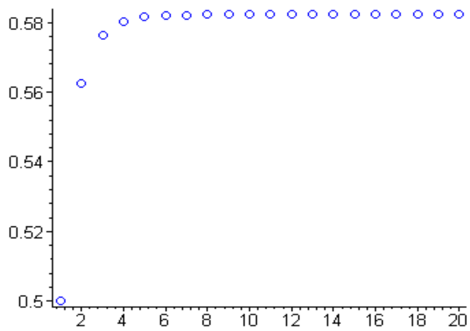


Figura 2 – Somas Parciais $S_k = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^n n^2},\ k = 1,2,\ldots,20.$

O nível de dificuldade desta questão é baixo, pois ela pode ser resolvida aplicando apenas o teste da razão, muito utilizado nos estudos de série de potências, desenvolvidos em disciplinas de Cálculo.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: Um novo Horizonte. Porto Alegre: Bookman, 2000. v.1 e v.2.

BURDEN, Richard L.; FAIRES, J. Douglas. *Análise numérica*. São Paulo: CENGAGE Learning, 2008.

CHAPRA, Steven C.; CANALE, Raymond P. *Métodos numéricos para engenharia*. São Paulo: McGraw-Hill, 2008.

GILAT, Amos; SUBRAMANIAM, Vish. *Métodos numéricos para engenheiros e cientistas*: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Porto Alegre: Bookman, 2008.

KREYSZIG, Erwin. *Advanced engineering mathematics*. New York, NY: John Wiley & Sons, 1993.

O'NEIL, Peter V. *Advanced engineering mathematics*. 4. ed. Pacific Grove, CA: Brooks/Cole, 1995.

STEWART, J. *Cálculo.* São Paulo: Pioneira, 2001. v.1 e v.2.

QUESTÃO 25

Seja V um espaço vetorial com produto interno sobre o corpo dos números complexos, então, a cada operador linear T:$V \to V$, está associado o operador adjunto de T, denotado por T^*:$V \to V$, que se relaciona com T por intermédio do produto interno definido em V. Usando esses dois operadores, é possível definir diversas classes de operadores lineares que possuem aplicações na Matemática e na Física, entre as quais se incluem:

- **operadores autoadjuntos são aqueles tais que $T^*=T$;**
- **operadores antiautoadjuntos são aqueles tais que $T^*=-T$;**
- **operadores unitários são aqueles tais que $T^*=T^{-1}$.**

Considerando $\lambda \in C$ um autovalor complexo qualquer do operador linear T e V um espaço vetorial com produto interno, sobre o corpo C, avalie as afirmações a seguir.

I. O número complexo λ também é autovalor de T^*.

II. Se T é autoadjunto, então $\lambda \in \mathbb{R}$.

III. Se T é antiautoadjunto, então λ é um número imaginário puro, isto é, $\lambda=bi$, com b número real não nulo.

IV. Se T é unitário, então $\lambda=1$ ou $\lambda=-1$.

É correto apenas o que se afirma em

A. I.

B. II.

C. I e IV.

D. II e III.

E. III e IV.

Gabarito: alternativa D

Autoria: Luiz Eduardo Ourique

COMENTÁRIO:

Dado um operador linear T em um espaço vetorial V com produto interno, dizemos que T^* é o operador adjunto de T em V se $\langle T(u),v\rangle=\langle u,T^*(v)\rangle$, para todos $u,v \in V$. Consequentemente, se λ é autovalor de T, então $\overline{\lambda}$ é autovalor de T^*. De fato, suponhamos que λ seja autovalor de T, com autovetor v, isto é, $T(v)=\lambda v$. Agora, suponhamos que α seja autovalor de T^*, com autovetor u, isto é, $T^*(u)=\alpha u$. Temos:

$$\lambda\langle v,u\rangle=\langle\lambda v,u\rangle=\langle T(v),u\rangle=\langle v,T^*(u)\rangle=\langle v,\alpha u\rangle=\bar{\alpha}\langle v,u\rangle.$$

Logo, se λ é autovalor de T, então $\bar{\lambda}$ é autovalor de T^*. Assim, a afirmativa do item I é falsa.

No livro de Lipschutz, página 608, encontramos o seguinte Teorema, dos quais enunciamos os resultados que nos interessam.

Teorema. Seja λ um autovalor de um operador linear T em V.

I. Se $T^*=T^{-1}$ (ist é, T é ortogonal ou unitário), então $|\lambda|=1$.

II. Se $T^* = T$ (isto é, T é autoadjunto), então λ é real.

III. Se $T^* = -T$(isto é, T é anti-autoadjunto), então λ é imaginário puro.

Demonstração. Em cada caso, seja v um autovetor de T associado a λ, isto é, $T(v)= \lambda v$ com $v\neq 0$. Logo, $\langle \lambda v, \lambda v\rangle$ é positivo.

Prova de (I). $\lambda\bar{\lambda}\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,\lambda v\rangle=\langle T(v),T(v)\rangle=\langle v,T^*T(v)\rangle= \langle v,v\rangle$. Mas $\langle v,v\rangle\neq 0$, logo, $\lambda\bar{\lambda}=1$, e assim, $|\lambda|=1$.

Prova de (II). Mostremos que $\lambda\langle v,v\rangle=\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$ de fato:
$\lambda\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\langle T(v),v\rangle=\langle v,T^*(v)\rangle= \langle v,T(v)\rangle=\langle v,\lambda v\rangle=\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$; mas $\langle v,v\rangle\neq 0$, logo, $\lambda=\bar{\lambda}$ e assim, λ é real.

Prova de (III). Mostremos que $\lambda\langle v,v\rangle=-\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$;
$\lambda\langle v,v\rangle=\langle\lambda v,v\rangle=\langle T(v),v\rangle=\langle v,T^*(v)\rangle= \langle v,-T(v)\rangle=\langle v,-\lambda v\rangle=-\bar{\lambda}\langle v,v\rangle$; mas $\langle v,v\rangle\neq 0$, logo $\lambda=-\bar{\lambda}$ ou $\lambda=-\bar{\lambda}$ e assim, λ é imaginário puro.

Com base na demonstração desse teorema, e usando o fato de que a afirmativa do item I é falsa, concluímos que estão corretas as afirmativas dos itens II e III. Ou seja, a alternativa D é a resposta correta. Em relação ao grau de dificuldade, considero esta uma questão média.

REFERÊNCIAS

BOLDRINI, J. L. *Álgebra Linear*. 3. ed. São Paulo: Harper & Row do Brasil, 1980.

LIPSCHUTZ, S. *Álgebra Linear*: teoria e problemas. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1994.

QUESTÃO 26

Para se criar um mapa-múndi, isto é, um mapa da terra, é preciso fazer uma projeção cartográfica, que é uma correspondência entre os pontos da Terra (em geral uma esfera) e os pontos do mapa (um plano) de modo que as distâncias sejam preservadas. Existem diversas projeções cartográficas da Terra destinadas a confecção de mapa-múndi, feitas a partir de um modelo esférico da Terra.

Nesse contexto, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

I. Não existe uma projeção cartográfica perfeita de toda a Terra, isto é, uma isometria que associe a cada de uma esfera um ponto no plano.

PORQUE

II. A curvatura gaussiana da esfera é positiva, enquanto a curvatura gaussiana do plano é zero.

A respeito dessas asserções, assinale a opção correta.

A. As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira.

B. As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a segunda não é uma justificativa correta da primeira.

C. A asserção I é uma proposição verdadeira, e a asserção II é uma proposição falsa.

D. A asserção I é uma proposição falsa, e a asserção II é uma proposição verdadeira.

E. As asserções I e II são proposições falsas.

Solução: alternativa A

Autoria: Luiz Eduardo Ourique

COMENTÁRIO:

Conforme encontramos a discussão em Carmo, as equações paramétricas de uma superfície são dadas na forma geral por X(u,v)=(x(u,v), y(u,v), z(u,v)), em que u e v são os parâmetros, que variam num conjunto aberto. A partir dessas equações, define-se a primeira forma quadrática, expressa em termos do triedro formado pelos vetores $X_u=X_u(u,v)$, $Y_u=Y_u(u,v)$ e $N(u,v)=X_u x Y_u$, que constituem uma base do R^3.

Uma isometria entre superfícies preserva as propriedades geométricas das superfícies, que dependem apenas da primeira forma quadrática. O Teorema Egregium de Gauss estabelece que a curvatura gaussiana depende somente da primeira forma quadrática e é invariante por isometrias locais; como consequência imediata desse teorema, temos que superfícies isométricas têm a mesma curvatura gaussiana em pontos correspondentes. Portanto, não existe uma isometria entre uma região do plano e uma região de esfera, já que a curvatura gaussiana do plano é identicamente nula e a curvatura gaussiana de uma esfera é estritamente positiva.

Logo, as asserções I e II são verdadeiras, e a segunda é uma justificativa correta da primeira. Isto é, a opção A é a resposta correta.

Em relação ao grau de dificuldade, considero que está é uma questão fácil.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. 607 p.

TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2011. 270 p.

QUESTÃO 27

Ao se trabalhar com funções de variáveis complexas a valores complexos é possível, por meio das equações de Cauchy-Riemann, utilizar algumas propriedades estudadas no cálculo diferencial para funções de duas variáveis reais a valores reais. Para isso, considere $U \subset C$ um subconjunto aberto, não vazio e conexo do plano complexo C e f:$C \to C$ uma função definida por $f(x+iy)+iv(x,y)$, para quaisquer $x+iy \in U$, onde u, v: $D \subset \mathcal{R}^2 \to \mathcal{R}$ são funções reais de variáveis reais e D é um subconjunto aberto de $\mathcal{R}^2$.

A partir dessas informações, avalie as afirmações a seguir.

I. Se f é uma função analítica tal que $f(U) \subset \mathcal{R}$, então f é uma função constante.

II. Se f é uma função analítica e a sua conjugada f:$U \subset C$ também é analítica, então f é uma função constante.

III. Se f é uma função analítica e a função módulo de f, $|f|$:$U \subset C \to C$, é constante, então f também é uma função constante.

É correto apenas o que se afirma em:

A. I, apenas.

B. II, apenas.

C. I e III, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: Alternativa E

Autoria: Maria Beatriz Menezes Castilhos e Gabriel Mattos Langeloh

COMENTÁRIO:

I. Se f é analítica, pelas equações de Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Como $f(U) \subset \mathcal{R}$, $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$com $v(x,y)=0$ quando Isso significa que, para $z=x+iy \in U$, $u_x=v_y=0$ e $u_y=-v_x=0$. Como as derivadas parciais de u valem 0, isso significa que $u(x,y) = k$ é constante. Logo $f(x+iy)=k+i0=k$ é constante. A afirmativa I) é, portanto, verdadeira.

II. Como $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ e $f(x+iy)=u(x,y)-iv(x,y)$ são funções analíticas, pelas equações de Cauchy-Riemann, temos $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, $u_x = -v_y$ e $u_y = v_x$. Assim, $v_y = u_x = -v_y$ implica que $v_y=0$ e, similarmente, $-v_x = u_y = v_x$ implica $v_x=0$. Segue que $u_x=0$ e $u_y=0$, de modo que u, v são funções constantes, pois suas derivadas parciais são nulas. Consequentemente $f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$ é constante e a afirmativa II) é verdadeira.

III. Se f é analítica, aplicando as equações de Cauchy-Riemann, obtemos $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Pela definição de módulo e pela hipótese de que $|f|$ é constante, temos $|f(x+iy)|=\sqrt{u(x,y)^2 + v(x,y)^2}=k$ para algum $k\in\mathcal{R}$. Segue que $u(x,y)^2=k^2-v(x,y)^2$.

Derivando parcialmente a última igualdade em relação a x, obtemos $2u(x,y)u_x(x,y)=-2v(x,y)v_x(x,y)$, logo $uu_x=-vv_x$ e, derivando parcialmente a mesma igualdade em relação a y, obtemos $uu_y=-vv_y$. Podemos agora utilizar as equações de Cauchy-Riemann para obter $uu_x=vu_y$ e $uu_y=-vu_x$. Multiplicando a primeira dessas equações por u e a segunda por v, temos $u^2u_x=uvu_y$ e $uvu_y= -v^2u_x$, logo $u^2u_x=-v^2u_x$, isto é,

$$u_x(u^2+v^2)=0.$$

Caso $u^2+v^2=0$, $u=v=0$ pois u, v são funções reais. Logo u, v nesse caso são constantes e, consequentemente, f também é constante. Senão, se $u_x=0$, u é função de y apenas, isto é, $u(x,y)=C_1(y)$. Analogamente, se tomamos as equações $uu_x= vu_y$ e $uu_y=-vu_x$ obtidas anteriormente e multiplicamos a primeira delas por v e a segunda por u, o resultado é $uvu_x= v^2u_y$ e $u^2u_y=-uvu_x$, logo $u^2u_y=-v^2u_y$. Segue que

$$u_y(u^2+v^2)=0.$$

Como anteriormente, $u^2+v^2=0$ implica que f é constante. Agora, se $u_y=0$, u é função de x, isto é, $u(x,y)=C_1(x)$. Mas isso significa que $u(x,y)=C_1$ é constante. Mostraremos agora que v também é constante.

Sejam $uu_x = -vv_x$ e $uu_y= -vv_y$ as equações obtidas previamente. Por Cauchy-Riemann, $uv_y = -vv_x$ e $uv_x = vv_y$. Multiplicando a primeira por u e a segunda por v, obtém-se $u^2v_y = -uvv_x$ e $uvv_x = v^2v_y$ donde $u^2v_y=-v^2v_y$. Então $v_y(u^2+v^2)=0$ e, como no caso de u, segue que podemos escrever $v=,C_2(x)$ isto é, como uma função de x apenas. Similarmente, multiplicando a primeira das equações por v e a segunda por u, temos $uvv_y=-v^2v_x$ = e uvv_y, portanto $v_x(u^2+v^2)=0$ e v pode ser escrita em função de y apenas. Segue que v também é constante. Logo f é constante e a afirmativa III) é verdadeira.

A questão é considerada com nível médio de dificuldade, uma vez que envolve conceitos básicos de funções das variáveis complexas, mas a resolução da questão exige muitas verificações algébricas, principalmente no item III.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. S. de S. *Variáveis complexas e aplicações*. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2000.

CHURCHILL, R. V. *Variáveis complexas e suas aplicações*. Tradução de Tadao Yoshioka. São Paulo: McGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo – EDUSP, 1975.

COLWELL, P.; MATHEWS, J. C. *Introdução às variáveis complexas*. São Paulo: Edgard Blucher, 1976.

NETO, A. L. *Funções de uma variável complexa*. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada (CPE), CNPq, 1993.

QUESTÃO 28

Com aplicações em eletrostática e mecânica, o Teorema de Green relaciona integrais de linha com integrais duplas. Seu resultado pode ser expresso pela igualdade

$$\int_r (F.dr) = \iint_A \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dA.$$

Nesse contexto, avalie as afirmações a seguir.

I. *r* é uma curva plana simples, fechada, diferenciável ou diferenciável por partes e *A* é a região delimitada por *r*.

II. $F=(F_1, F_2)$ é um campo vetorial de classe C^1 definido em um conjunto aberto do $\mathcal{R}^2$ que contém a região *A*.

III. $\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$ é uma expressão que se anula para campos vetoriais conservativos.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. III, apenas.

C. I e II, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa E

Autoria: Augusto Vieira Cardona

COMENTÁRIO:

Para resolver esta questão, é necessário o conhecimento das hipóteses envolvidas no enunciado do Teorema de Green e de alguns conceitos sobre curvas e campos vetoriais.

O Teorema de Green, segundo Gonçalves & Flemming (2007, p. 328 e 348) diz:

> Sejam *C* uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e *R* a região fechada delimitada por *C*. Se $\vec{f}=(f_1,f_2)$ é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um domínio *D* que contém *R*, então

$$\oint_C \vec{f}.d\vec{r} = \oint_C f_1dx + f_2dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA.$$

Uma curva é dita suave ou regular se admite uma parametrização $\vec{r}(t)$, $t \in I \subset R$, que tem derivada contínua $\vec{r}'(t)$ e $\vec{r}'(t) \neq \vec{0}$, para todo $t \in I$. Uma curva é dita suave por partes se puder ser dividida em um número finito de curvas suaves. Uma curva suave por partes também é vista na literatura como lisa por partes ou por trechos (ANTON, 2007; STEWART, 2006; THOMAS, 2009), seccionalmente suave (LEITHOLD, 1994) ou parcialmente suave (SWOKOWSKI, 1994).

Por outro lado, segundo Lima (1981, p. 80-81), um caminho em R^n é uma aplicação $f{:}I \rightarrow R$, cujo domínio é um intervalo $I \subset R$. Se existe $f'(a)$ para todo $a \in I$, dizemos que $f{:}I \rightarrow R$ é um caminho diferenciável. Lima (1981, p. 104) afirma que um caminho diferenciável $f{:}I \rightarrow R$ diz-se regular quando $f'(t) \neq 0$, para todo $t \in I$.

Dessa forma, **a afirmação I do exercício é verdadeira**, pois a curva *r* e a região R têm as características descritas, ou seja, *r* é uma curva plana simples, fechada, diferenciável ou diferenciável por partes e *A* é a região delimitada por *r*. Deve-se observar que quem está resolvendo a questão poderá se confundir, ao perceber que não é dito que a curva proposta está orientada no sentido anti-horário ou que a mesma seja suave. Porém, deve-se observar que o exercício apresenta algumas propriedades da curva envolvida, sem dizer que as afirmações são as hipóteses necessárias para a tese do Teorema de Green.

Segundo Boulos (2002, p. 285-286), um campo de vetores em um subconjunto *D* de R^n é uma função **F** que a cada *p* de *D* associa um vetor **F**(*p*). Escrevendo **F**(*p*) = *M*(*p*)**i** + *N*(*p*)**j**, as funções *M* e *N* são chamadas funções componentes de **F**. Um adjetivo é atribuído a **F** (contínuo, de classe C^1, etc.) se esse adjetivo pode ser atribuído às funções componentes. Uma função real *f* de *n* variáveis é de classe C^1 se seu domínio *D* é um aberto de R^n e as derivadas parciais de primeira ordem são contínuas em *D* (BOULOS, 2002, p. 61). Assim, podemos concluir que **a afirmação II do exercício** também **é verdadeira**.

Por último, **a afirmação III é verdadeira**, pois, segundo Anton (2007, p. 1133):

> Se $f(x,y)$ e $g(x,y)$ forem contínuas e tiverem derivadas parciais de primeira ordem contínuas em alguma região aberta *D* e se o campo vetorial **F**(x,y) = $f(x,y)$**i** + $g(x,y)$**j** for conservativo em *D*, então $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ em cada ponto de *D*. Reciprocamente, se D for simplesmente conexo e $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$ valer em cada ponto de D, então **F**(x,y) = $f(x,y)$**i** + $g(x,y)$**j** é conservativo.

Dessa forma, a alternativa correta é a (E), as três afirmações são verdadeiras.

Esta questão deve ser considerada de média para difícil, pois envolve o conhecimento das hipóteses do Teorema de Green, as quais podem não estar todas em mente. Além disso, os livros de Cálculo usam diferentes nomenclaturas para as curvas, sem fazer relação entre os diferentes nomes encontrados na literatura, o que pode dificultar a resolução do problema. Por último, o fato de não aparecer em todas as restrições impostas à curva na afirmação I pode gerar confusão na escolha da alternativa correta.

REFERÊNCIAS

ANTON, H. *Cálculo*: um novo horizonte. 6. ed. Porto Alegre: Bookman, 2007. v.2.

BOULOS, P.; ABUD, Z. I. *Cálculo Diferencial e Integral*. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2002. v.2.

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B*: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

LEITHOLD, L. *O cálculo*: com geometria analítica. 3 ed. São Paulo: Ed. Harbra, 1994. v.2.

LIMA, E. L. *Curso de análise*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1981. v.2.

STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006. v.2.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Makron Books, 1994. v.2.

THOMAS Jr., G. B.; WEIR, M. D., HASS, J. *Cálculo*. 11. ed. São Paulo: Pearson, 2009. v.2.

QUESTÃO 29

Em topologia dos espaços métricos, é comum o estudo de propriedades relativas a conjuntos abertos, fechados, compactos, conexos, conexos por caminhos, entre outras. Essas características permitem comparar espaços métricos e verificar se são topologicamente equivalentes. A respeito disso, avalie as afirmações a seguir.

I. Se um espaço métrico M pode ser escrito como união de dois conjuntos A e B, disjuntos, abertos e fechados, então M não é conexo.

II. Se M é um espaço métrico, então um conjunto $K \subset M$ é compacto se, e somente se, K é fechado e limitado.

III. Se $J = [0,5[$ é um intervalo com a métrica induzida de R, então o intervalo $[0,1[$ é aberto em J.

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. III, apenas.

C. I e II, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa B

Autoria: Tânia C. B. Cabral

COMENTÁRIO:

Resolveremos a questão buscando evidenciar as definições, os conceitos e os resultados nelas envolvidos, conforme apresentados em textos sobre espaços métricos, para fundamentar nossa análise sobre o significado dela na formação do bacharel em matemática.

A assertiva I, "Se um espaço métrico M pode ser escrito como união de dois conjuntos A e B, disjuntos, abertos e fechados, então M não é conexo", exige que o aluno conheça a definição de conexidade envolvendo espaço métrico. Define-se um **espaço métrico** como um par ordenado (E,d) em que E é um conjunto e d é uma função definida no produto cartesiano de E por ele mesmo, assumindo valores – distância de um elemento a outro – no conjunto dos números reais não negativos. A função d é denominada **métrica**; ela satisfaz as seguintes condições: (I) a distância de um ponto a ele mesmo é nula, (II) a distância entre dois pontos distintos é positiva e simétrica e (III) a desigualdade triangular vale.

Prosseguindo, diz-se que um espaço métrico M é **conexo** se a única cisão possível em M é a trivial. Essa definição, por consequência, exige conhecer outras duas definições, a de cisão e de cisão trivial. A definição de **cisão de** M requer que sejam satisfeitas duas condições, a saber, dados dois conjuntos abertos e fechados em M, a união deles é M e além disso eles são disjuntos – a intersecção é vazia. A definição de **cisão trivial** exige que um ou outro seja vazio, o que implica que um deles é igual a *M*. Portanto, a cisão trivial é $M = M \cup \varnothing$. Assim, dizer que um espaço métrico é desconexo significa que *M* admite uma cisão não trivial. Sabendo que condições determinam quando um espaço métrico é desconexo, nota-se que a assertiva I não é verdadeira, pois falta a condição de *A* e *B* serem conjuntos não vazios.

A assertiva II, "Se *M* é um espaço métrico, então um conjunto $K \subset M$ é compacto se, e somente se, *K* é fechado e limitado", aparentemente exige a compreensão das definições de compacto, de fechado e de limitado. Na dupla implicação, avalia-se a primeira proposição, "*M* é um espaço métrico, seja conjunto $K \subset M$ compacto, então *K* é fechado e limitado".

Para mostrar a assertiva, faremos a prova em dois passos, ou seja, mostraremos se *M* é um espaço métrico e $K \subset M$ um conjunto compacto, então (1) *K* é limitado e (2) *K* é fechado.

Diz-se que *K* **é compacto** se qualquer cobertura aberta de *K*, $K \subset UA$ em que *A* são conjuntos abertos em *M*, possui uma subcobertura finita, $K \subset A_1 U\ A_2 U ... U\ A_n$. Em um espaço métrico *M*, um conjunto *A* é **aberto** se todo elemento é centro de uma bola aberta inteiramente contida no conjunto. Uma **bola aberta no espaço métrico** *M*, de centro $x \in M$ e raio *r* é o conjunto dos elementos de *M* cuja distância até *x* é menor do que o raio. Dizer que *K* é **limitado em** *M* significa que está contido em uma bola de *M*, ou seja, existe uma constante positiva *r*, o raio da bola, tal que a distância entre dois pontos quaisquer de *K* é menor ou igual a 2*r*.

Com todas as definições apresentadas, podemos agora provar (1), se *K* é compacto então *K* é limitado.

Seja um qualquer elemento qualquer *a* de *M;* tomamos bolas abertas de raio $n \in N$ de centro *a*. A união dessas bolas é uma cobertura aberta de *M*, portanto $K \subset \cup_{n=1}^{\infty} B(a,n)$. Como *K* é compacto, extrai-se dessa cobertura uma subcobertura finita cuja união é $B(a,j)$, em que *j* é o máximo desses raios. Como $K \subset B(a,j)$, *K* é limitado.

Para mostrar (2) se *K* é compacto então *K* é fechado, basta provar que *K* contém todos seus pontos aderentes. Diz-se que um ponto *a* do espaço métrico é aderente de *K* se toda bola aberta de *M* centrada em *a* intersecta *K*.

Para provar a proposição, por contradição, suponhamos que *x* é aderente de *K* mas que não está em *K*. Sejam os abertos $\boldsymbol{A_n = M - B\left[x, \frac{1}{n}\right]}$ em que $n \in N$ é não nulo. A interseção dessas bolas fechadas é *x* logo a união desses abertos é uma cobertura de *K*. Pela construção dos abertos, vê-se que $A_1 \subset A_2 \subset ...$. Logo, obtém-se uma união finita desses abertos que é o conjunto de maior índice dessa coleção, A_{n_i}. Como *x* está no fecho de *K* e não está em *K*, as bolas fechadas $\boldsymbol{B\left[x, \frac{1}{n}\right]}$ contêm algum ponto de *K*. Então, A_{n_i} não contém *K*. Isso significa que da cobertura $K \subset \cup A_n$ não se obtém uma subcobertura finita para *K*, contrariando o fato de *K* ser compacto.

Para tratar a volta na assertiva II, estuda-se a afirmação "*M* é um espaço métrico, se um conjunto $K \subset M$ é fechado e limitado, então *K* é compacto". Nesse caso é uma proposição falsa, isto é, um subconjunto fechado e limitado pode não ser compacto, o que se vê analisando o seguinte exemplo clássico encontrado em Lima (1977). Considera-se o espaço de Hilbert l^2, consistindo de todas as sequências infinitas $\langle x_1, x_2, x_3, ... \rangle$, tais que $\Sigma_{n=1}^{\infty} (x_n)^2 < \infty$. Essa generalização do espaço euclidiano não tem dimensão finita. Toma-se em l^2 o conjunto dos elementos da forma $e_n = (0,...,0,1,0...)$, em que todas a coordenadas são nulas exceto a n-ésima que vale 1. Esse conjunto é limitado pois está contido em uma bola centrada em 0 de raio $r=1$. Esse conjunto é fechado pois cada elemento é ponto aderente do conjunto, isto é, cada ponto é o centro de uma bola aberta cuja interseção com o conjunto é o próprio ponto já que a distância entre dois elementos quaisquer do conjunto é sempre igual a $\sqrt{2}$. Então da cobertura de bolas abertas centradas nos pontos do conjunto e de raio removendo uma dessas bolas, seu centro não seria coberto pelas demais. Segue que esse conjunto não é compacto em l^2.

Para analisar a assertiva III, "Se $J=[0,5[$ é um intervalo com a métrica induzida de R, então o intervalo $[0,1[$ é aberto em *J*" é preciso observar que afirmar que *J* é um intervalo com a métrica induzida da reta, é dizer que *J* **é um espaço métrico**, (*J*,*d*) em que a métrica *d* é a métrica em R restrita ao produto cartesiano de *J* por *J*. Então, as bolas abertas de *J* são interseções de *J* com bolas abertas de R Nesse sentido, [0,1[é uma bola aberta em *J*, porque [0,1[=[0,5[∩]-1,1[.

Comentário final sobre o nível de dificuldade/facilidade da questão. As argumentações aqui tecidas foram baseadas no livro “Espaços Métricos”, de autoria de Elon Lages Lima. Na formação de um bacharel em matemática, os estudos que se realiza visam levar o aluno a desenvolver habilidade no manejo de definições e no modo de estruturar argumentações, pois, afinal, está sendo formado um pensamento bastante peculiar.

As questões contidas nas duas primeiras proposições não exigem nem verificam se o aluno desenvolveu essa habilidade. A primeira pode ser resolvida comparando a definição com o enunciado da questão, sem necessitar compreensão da conexidade; é quase uma “pegadinha”. A segunda é um resultado muito em evidência em cursos sobre espaços métricos. O aluno pode tê-lo registrado sem tê-lo entendido, sem ter entendido em que condições fechados-limitados são compactos e sem “lembrar” o contraexemplo. Só a terceira afirmação requer algumas das habilidades esperadas.

REFERÊNCIA

LIMA, E. L. *Espaços métricos*. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 1977.

QUESTÃO 30

A respeito do valor da integral $\int_\gamma (z-a)^n dz$, em que n é um inteiro, z é uma variável complexa e γ uma curva fechada no plano complexo, avalie as afirmações a seguir:

I. É nulo para todo $n \geq 0$ e qualquer curva fechada γ, uma vez que $(z-a)^n$ é a derivada de $\frac{(z-a)^{n+1}}{n+1}$.

II. É nulo para todo $n<0, n\neq -1$, e qualquer curva fechada γ que não passe por a.

III. É nulo se $n=-1$ e γ for a circunferência dada por $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.

IV. É igual a $2\pi i$, se $n=-1$ e γ for uma curva fechada contida no semiespaço do plano, $Im z > 0$, em que a não pertença a esse semi-espaço.

É correto apenas o que se afirma em:

A. III.

B. IV.

C. I e II.

D. I e III.

E. II e IV.

Gabarito: alternativa C

Autoria: Thaísa Jacintho Müller e Augusto Vieira Cardona

COMENTÁRIO:

Para resolver a questão, são necessários os conhecimentos dos conceitos de Funções complexas, Integração de Funções complexas e, mais especificamente, da Fórmula Integral de Cauchy e o Teorema de Cauchy-Goursat (ÁVILA, 2000, p. 89-101).

Com base nesses conhecimentos, vamos analisar cada afirmação apresentada:

I. De acordo com o que é dito na Afirmação I, para $n \geq 0$ a função $f(z)=(z-a)^n$ é uma função analítica, cuja integral sobre a curva fechada é nula, pelo Teorema de Cauchy-Goursat. Logo, a afirmação é verdadeira.

II. Sabemos que, para qualquer curva fechada y tal que a, o qual é a única singularidade de $f(z)=(z-a)^n$, para n negativo, não esteja no seu interior, pelo Teorema de Cauchy-Goursat, $\int_\gamma (z-a)^n dz=0$, pois $f(z)$ é uma função analítica em z para todo z no interior de γ. Por outro lado, para qualquer curva fechada γ tal que a esteja no seu interior, pela Fórmula Integral de Cauchy, $\int_\gamma (z-a)^n dz = \int_\gamma \frac{1}{(z-a)^{-n}} dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-a)^{k+1}} dz = \frac{2\pi i}{k!} g^{(k)}(a) = 0$, considerando $-n=k+1, g(z)=1$ e observando que $k \geq 1$, pois $n \geq 0$. Logo, a afirmação é verdadeira.

III. Para n=-1, a integral $\int_\gamma (z\text{-}a)^n dz$ pode ser reescrita como $\int_\gamma \frac{1}{z\text{-}a} dz$. Resta saber, então, se a singularidade $z=a$ localiza-se dentro ou fora da região delimitada por γ. Caso esteja fora, pelo Teorema de Cauchy-Goursat, a integral será nula; e se estiver dentro, pela Fórmula Integral de Cauchy, a integral será dada por $2\pi i\ g(a)$, onde $g(z)$=1 é analítica na região em questão. Observa-se que $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, é uma circunferência de centro a, ou seja, a singularidade está dentro da região considerada e a integral assumirá o valor $2\pi i$, não sendo nula. Logo, a afirmação é falsa.

IV. Assim como no caso anterior, temos $\int_\gamma \frac{1}{z\text{-}a} dz$. Conforme dito na explicação do item III, no caso em que a não pertença ao semi-espaço onde se localiza a curva γ a integral será nula, pelo Teorema de Cauchy-Goursat. Logo, a afirmação é falsa.

Conclui-se, assim, que as afirmações corretas são I e II, o que leva à alternativa C. Considera-se o problema de nível médio, pois, apesar de exigir poucos cálculos, necessita do conhecimento dos teoremas sobre integração complexa.

REFERÊNCIA:

ÁVILA, Geraldo. *Variáveis Complexas e Aplicações.* Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2000.

QUESTÃO 31

A integração de funções é um dos principais tópicos da Análise essencialmente teórica, enquanto as equações diferenciais possuem diversas aplicações dentro e fora da Matemática. Em ambos os casos, o estudo das sequências e séries de funções com relação a convergência, derivação e integração termo a termo, ocupa um papel essencial. Diante disso, analise as afirmações a seguir.

Considere a sequência de funções $f_n\colon [0,1] \to IR$, dada por $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ para todo $n = 1,2, \ldots$. Se $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f(x)$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$.

I. Considere J=[0,1] e g:$J \to IR$ dada por $g(x)=\begin{cases} 1 \ se \ x \in Q \cap J \\ 0 \ se \ x \notin Q \cap J \end{cases}$. Observe que $Q \cap J$ tem medida nula, ou seja, $g(x)$=0 em quase todo ponto de J. Logo, $\int_0^1 g(x)dx = 0$.

II. A sequência de funções $f_n[0,1] \to IR$, dada por $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}$ para todo n = 1,2, ... satisfaz $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx.$

É correto o que se afirma em

A. I, apenas.

B. III, apenas.

C. I e II, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: Alternativa B

Autoria: Gabriel Mattos Langeloh

COMENTÁRIO:

I. Observe que $f(x)$ está bem definida, pois a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x \in IR$. Para ver isso, podemos calcular o raio de convergência da série, dado por

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{1/n!}{1/(n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} n + 1 = \infty$$

Como o raio de convergência é infinito, a série converge para todo $x \in IR$. Agora, se $x = 0$, então $f(x)$=0, pois $f_n(x)$= para todo $n \in N$. Logo a afirmativa I) é falsa.

II. Segundo Medeiros (2008), um conjunto $X \subseteq IR$ possui medida nula se para todo ε > 0 for possível obter uma coleção enumerável de intervalos abertos I_1, I_2, ..., I_n,... tais que $X \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon$, onde $|I_n|$ = b-a, e a,b são os extremos inferior e superior, respectivamente, do intervalo I_n. O conjunto $J \cap Q$ definido na questão possui medida nula, pois todo conjunto enumerável possui medida nula e $J \cap Q \subseteq Q$, sendo portanto enumerável. Utilizando a definição de integral baseada em integral superior e integral inferior, equivalente à integral de Riemann (LIMA, 2016), pode-se observar que qualquer partição $t_0,t_1,...,t_n$ do intervalo [0,1] é tal que os intervalos $[t_{i-1},t_i]$ para $i=1,...,n$ possuem tanto números racionais como irracionais, então

$$sup_{\{x\in[t_{i-1},t_i]\}}g(x) = 1\ para\ i = 1,\ldots,n$$
$$inf_{\{x\in[t_{i-1},t_i]\}}g(x) = 0\ para\ i = 1,\ldots,n$$

de modo que as integrais superior e inferior valem, respectivamente, 1 e 0. Assim, as integrais superior e inferior diferem e a integral $\int_0^1 g(x)dx$ não está definida. Logo a afirmativa é falsa.

Cabe citar que a integral de Lebesgue de $g(x)$ está definida e que, no sentido de Lebesgue,

$$\int_0^1 g(x)dx = 0$$

pois g é a função indicatriz de $J \cap Q$ e a integral de Lebesgue de uma função indicatriz é a medida do conjunto base, de modo que a afirmativa seria verdadeira pela definição da integral de Lebesgue. A afirmativa foi considerada falsa no gabarito da prova embora a questão não especifique qual definição de integral deve ser utilizada.

III. Pelo provado na afirmativa I), sabemos que a série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ converge para todo $x \in IR$. De fato, podemos observar que a série dada é a série de Taylor de $f(x)=e^x-1$. Segue que

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \int_0^1 (e^x - 1)dx = e - 2.$$

Por outro lado,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n!}dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)!} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}.$$

Como $e= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, temos $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!} = e - 2$, logo

$$\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)dx$$

e a afirmativa é verdadeira.

O nível de dificuldade desta questão pode ser considerado médio, pois requer conhecimento de conceitos básicos de integração e séries de funções. Por outro lado, ao envolver conjunto de medida nula, sugere que o item II seja analisado sob a ótica da integral de Lebesgue, o que demandaria um aprofundamento dos conteúdos. Porém o gabarito demonstra que deve ser usada, somente, a integral de Riemann.

REFERÊNCIAS

FERNANDEZ, P. *Medida e Integração*. Projeto Euclides. Rio de Janeiro: IMPA, 1976.

LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise.* 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016. Volume 1.

MEDEIROS, Luis Adauto da Justa; MELO, Eliel Amancio de. A *Integral de Lebesgue*. 6. ed. Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2008.

QUESTÃO 32

O Teorema de Green é uma grande ferramenta para o cálculo de integrais de linha. Seu resultado permite relacionar uma integral de linha ao longo de um caminho fechado com uma integral dupla sobre a região delimitada por este caminho.

Usando o Teorema de Green, conclui-se que a integral de linha do campo vetorial, $F:\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $F(x,y)=(y,-x)$, ao longo do caminho fechado definido pelas curvas $h(x)=\ln(x)$;$y=0$;$x=2$, é igual a

A. -2 ln(2) + 1.

B. 2 ln(2) - 1.

C. -4 ln(2) + 2.

D. 4 ln(2) - 2.

E. ln(2) - 1.

Gabarito: alternativa C

Autoria: Augusto Vieira Cardona

COMENTÁRIO:

Para resolver esta questão, é necessário o conhecimento do Teorema de Green, da técnica de integração por partes e sobre o cálculo de integrais duplas. O Teorema de Green, segundo Gonçalves & Flemming (2007, p. 348) diz:

> Sejam *C* uma curva fechada simples, suave por partes, orientada no sentido anti-horário, e R a região fechada delimitada por *C*. Se $\vec{f}=(f_1, f_2)$ é um campo vetorial contínuo com derivadas parciais de 1ª ordem contínuas em um domínio *D* que contém *R*, então
>
> $$\oint_C f_1 dx + f_2 dy = \iint_R \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dA.$$

O caminho *C* e a região *R* delimitada por esse caminho estão esboçados na Figura 1 a seguir. Deve-se observar que esse caminho e o campo vetorial $F(x,y) = (y,-x)$ satisfazem as condições do Teorema de Green. A região *R* é descrita como $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 1 \leq x \leq 2,\ \ 0 \leq y \leq \ln(x)\}$.

Assim, pelo Teorema de Green e pelo uso da integração por partes, obtemos que:

$$\oint_C ydx - xdy = \iint_R \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) dA = \iint_R -2\, dA$$

$$= \int_1^2 \int_0^{\ln(x)} -2\, dy\, dx = \int_1^2 -2\ln(x)\, dx = -2\left\{x\ln(x)|_1^2 - \int_1^2 dx\right\} =$$

$$-4\ln(2) + 2.$$

Dessa forma, a alternativa correta é a C.

Esta questão é considerada simples, desde que o respondente conheça o enunciado do Teorema de Green, o qual já foi apresentado no enunciado da questão 28.

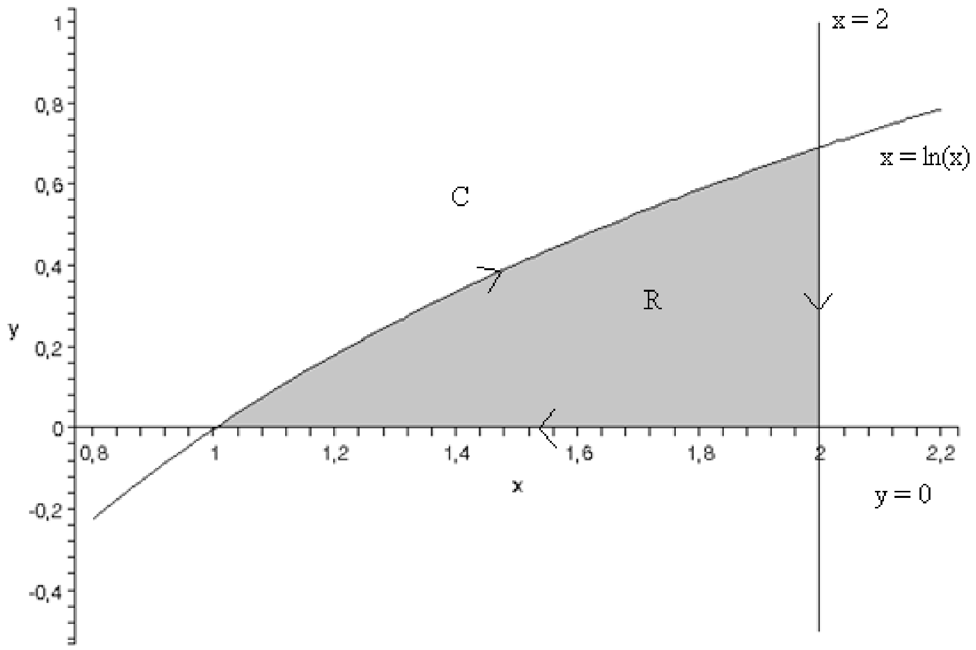


Figura 1 – A região *R* e a curva *C*.

REFERÊNCIA

GONÇALVES, M. B.; FLEMMING, D. M. *Cálculo B*: funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integrais curvilíneas e de superfície. 2 ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2007.

QUESTÃO 33

O cilindro reto sobre o círculo $x^2+y^2=1$ admite parametrização $x:U\to IR^3$, em que,x:$(u,v)=(cos(u), sen(u),v)$, $U=\{u,v\in IR^2:0< u <2\pi,-\infty<v\infty\}$. Para se encontrar a primeira forma fundamental dessa superfície regular, $I=Edu^2 +2Fdudv+Gdv^2$, foram utilizadas as expressões a seguir.

I. $x_u=(sen(u),-cos(u), 0)$.

II. $x_v=(0, 0, 1)$.

III. $E=(u,v)=1$

É correto afirmar em

A. I, apenas.

B. II, apenas.

C. I e III, apenas.

D. II e III, apenas.

E. I, II e III.

Gabarito: alternativa D

Autoria: Ivan Ricardo Tosmann

COMENTÁRIO:

A primeira forma fundamental permite efetuar alguns cálculos geométricos, tais como comprimento de arco, ângulo entre curvas e área de regiões em uma superfície regular. Para isso, define-se a métrica de uma superfície regular $S\subset IR^3$ como a aplicação que associa a cada ponto $p\in S$ o produto interno $<,>_p$ induzido no plano tangente T_pS pelo produto interno canônico de IR^3. Se $w_1,w_2\in T_pS\subset IR^3$, então $<w_1,w_2>_p$ é igual ao produto interno de w_1 e w_2 como vetores de IR^3. A esse produto interno, que é uma forma bilinear e simétrica, corresponde uma forma quadrática $I_p:T_pS\to IR, I_p(w)=<w,w>_p=|w|^2\geq 0$, chamada de primeira forma fundamental da superfície regular $S\subset IR^3$ em $p\in S$.

Considere a expressão da primeira forma quadrática na base $\{x_u,x_v\}$ associada a uma parametrização $x(u,v)$ em p. Como um vetor tangente $w\in T_pS$ é o vetor tangente a uma curva $\alpha(t)=\chi(u(t),v(t))$, $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$, com $p=\alpha(0)=\chi(u_0,v_0)$, obtêm-se

$$\begin{aligned}
I_p(\alpha'(0)) &=<\alpha'(0)\,,\alpha'(0)>_p\\
&=<\chi_u u'+\chi_v v',\chi_u u'+\chi_v v'>_p\\
&=<\chi_u,\chi_u>_p(u')^2+2<\chi_u,\chi_v>_p u'v'+<\chi_v,\chi_v>_p(v')^2\\
&=E(u')^2+2Fu'v'+G(v')^2,
\end{aligned}$$

em que os valores das funções envolvidas são calculados em t=0, e

$$E = <x_u, x_u>_p, F = <x_u, x_v>_p, G = <x_v, x_v>_p$$

São os coeficientes da primeira forma fundamental na base $\{x_u, x_v\}$ de T_pS. Fazendo p variar na vizinhança coordenada correspondente a $x:(u,v)$, obtêm-se funções $E:(u,v)$, e $G:(u,v)$ diferenciáveis nessa vizinhança. Então,

A afirmação (I) é falsa.

$x:(u,v)= (cos(u), sen(u),v)$, $x_u=(-sen(u),cos(u),0)$.

A afirmação (II) é verdadeira.

$x:(u,v)= (cos(u), sen(u),v)$, $x_v=(0,0,1)$.

A afirmação (III) é verdadeira.

$E(u,v)= <x_u,x_u>=<(-sen(u),cos(u),0), (-sen(u),cos(u),0)>=sen^2(u)+cos^2(u)=1$.

REFERÊNCIA:

DO CARMO, MANFREDO P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies.* Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.

QUESTÃO 34

O teorema fundamental do cálculo é uma poderosa ferramenta para a Matemática, pois é amplamente utilizado em suas diversas subáreas. Ao longo da história, diversas versões desse teorema foram demonstradas. Fazendo uso livremente dessas versões, considerando duas funções $f,g:[a,b]\to R$ contínuas no intervalo fechado e limitado $[a,b]$ e definindo F, $G:[a,b]\to R$ por $F(x)= a+\int_a^x f(t)dt$ e $G(x)=b+\int_a^x g(t)dt$, para todo $x\in[a,b]$, avalie as seguintes asserções e a relação proposta entre elas.

Para todo $x\in[a,b]$, tem-se que $F(x)G(x)-F(a)G(a)= \int_a^x f(t)G(t) + F(t)g(t)dt$

PORQUE

Se $\Psi: [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então $\Psi(x) - \Psi(a) = \int_a^x \frac{d}{dt}\Psi(t)dt.$

Acerca dessas asserções, assinale a alternativa correta.

A. As asserções I e II são proposições verdadeiras, e a II é uma justificativa correta da I.

B. As asserções I e II são proposições verdadeiras, mas a II não é uma justificativa correta da I.

C. A asserção I é uma proposição verdadeira, e a II é uma proposição falsa.

D. A asserção I é uma proposição falsa, e a II é uma proposição verdadeira.

E. As asserções I e II são proposições falsas.

Gabarito: alternativa A

Autoria: Augusto Vieira Cardona e Maria Beatriz Menezes Castilhos

COMENTÁRIO:

Para resolver esta questão, é necessário conhecer propriedades operatórias da derivada e os seguintes teoremas, que podem ser encontrados em Lima (2011, p. 319-324):

1. Toda função contínua $f:[a,b]\to R$ é integrável.
2. Seja $f:[a,b]\to R$ integrável. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$, então a função $F:[a,b]\to R$, definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$, é derivável no ponto c e se tem $F'(c)= f(c)$.
3. Se uma função integrável $f:[a,b]\to R$ possui uma primitiva $F:[a,b]\to R$, então $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$. (Teorema Fundamental do Cálculo)

A asserção II é uma releitura do Teorema Fundamental do Cálculo (teorema 3), considerando $F(x) = \Psi(x)$ e $\frac{d}{dx}\Psi(x) = f(x)$. Portanto é uma afirmação verdadeira.

Pelo teorema 1, as funções *f* e *g* são integráveis em [*a*,*b*] e, consequentemente, pelo teorema 2, tem-se que $F'(t) = f(t)$ e $G'(t) = g(t)$, para todo $t \in [a,b]$.

Assim, $f(t)G(t) + F(t)g(t) = F'(t)G(t) + F(t)G'(t) = \frac{d}{dt}[F(t)G(t)]$ e, pela asserção II, ou o teorema 3, tem-se $\int_a^x [f(t)G(t) + F(t)g(t)]dt = \int_a^x \frac{d}{dt}[F(t)G(t)]dt =$ $F(x)G(x)-F(a)G(a)$, ou seja, a asserção I é verdadeira e é uma consequência da asserção II, resultando na alternativa A como correta.

A questão é considerada com nível médio de dificuldade, uma vez que envolve um teorema básico sobre integrais definidas, mas a resolução exige um aprofundamento ao relacionar outros teoremas da área e a percepção de propriedades que não estão explicitas.

REFERÊNCIA:

LIMA, E. L. *Curso de análise*. 13. ed. Rio de Janeiro: IMPA, CNPq, 2011. v.1.

QUESTÃO 35

Os anéis quociente são frequentemente utilizados para se obter extensões de corpos. Se F é um corpo e P é um polinômio irredutível em $F[X]$, então $L=F[X]/<P>$ é um corpo cujo polinômio minimal sobre F é P.

Considerando essas informações, assinale a opção que representa um corpo cujo polinômio minimal é indicado pelo gerador do ideal.

A. $Z[x]/<x^2-1>$

B. $R[x]/<x^2+2>$

C. $C[x]/<x^2+3>$

D. $Q[x]/<x^2-4>$

E. $R[x]/<x^2-5>$

Gabarito: alternativa B

Autoria: Neda da Silva Gonçalves e Thaísa Jacintho Müller

COMENTÁRIO:

Para resolver essa questão, são necessários conhecimentos específicos de Álgebra: Anéis de polinômios, Polinômios redutíveis ou irredutíveis, Ideais principais, Anel quociente, Extensão de Corpos.

Analisando-se as alternativas, pode ser constatado que:

- Z não é corpo e ainda $x^2-1=(x+1)(\ x-1)$ é redutível em $Z[x]$.
- $x^2+3=(x-\sqrt{3}i)(z+\sqrt{3}i)$ e portanto é redutível sobre $C[x]$.
- $x^2-4=(x-2)(x+2)$, redutível em $Q[x]$.
- $x^2-5=(x-\sqrt{5})(z+\sqrt{5})$, redutível em $R[x]$.
- Finalmente tem-se que $p[x]=(x^2+2)$ é irredutível em $R[x]$ e portanto considerando o ideal principal $I = <x^2+2>= p(x).R[x]$ tem-se um ideal maximal. Tem-se então uma extensão de R, o corpo ${}^{R[x]}\!/_{<x^2+2>}$. Alternativa correta.

A demonstração deste resultado encontra-se em Gonçalves (1979, p. 76).

REFERÊNCIA:

GONÇALVES, Adilson. *Introdução* à Álgebra. Rio de Janeiro: IMPA, 1979.

EDITORA UNIVERSITÁRIA DA PUCRS – EDIPUCRS

A Editora Universitária da PUCRS já publicou mais

de 1.500 obras impressas e mais de 250 livros digitais.

Siga a EDIPUCRS nas redes sociais, fique por dentro

das novidades e participe de promoções e sorteios.

www.pucrs.br/edipucrs

www.facebook.com/edipucrs

www.twitter.com/edipucrs

www.instagram.com/edipucrs

Para receber as novidades no seu e-mail, cadastre-se pelo nosso *site*

ou envie um *e-mail* diretamente para comunica.edipucrs@pucrs.br.

Acesse o *QR Code* abaixo e conheça os livros impressos,

os *e-books* pagos/gratuitos, os periódicos científicos,

os próximos lançamentos e os conteúdos exclusivos da EDIPUCRS.

ediPUCRS

Av. Ipiranga, 6.681 – Prédio 33

Caixa Postal 1429 – CEP 90619-900

Porto Alegre – RS – Brasil

Telefone: (51) 3320-3523

E-mail: edipucrs@pucrs.br